

Facharbeit
aus dem Leistungskurs
Physik

Die Chaostheorie und Fraktale in der Natur

Eine physikalisch-philosophische Abhandlung
über das Wesen der Natur

Verfasser: Maximilian Jokel

Kursleiter: OStR Markus Fiederer

Erzielte Note: _____ In Worten: _____

Erzielte Punkte: _____ In Worten: _____

Abgabe beim Kollegstufenbetreuer am _____

Unterschrift des Kursleiters _____

Die Chaostheorie und Fraktale in der Natur

Eine physikalisch-philosophische Abhandlung
über das Wesen der Natur



Vorwort: Von der euklidischen Geometrie zur fraktalen Geometrie – Das Prinzip der Linearisierung	4
1. Einleitung	6
1.1. Motivation und Intention	6
1.2. Struktur der Arbeit	6
2. Die Chaostheorie	7
2.1. Historische Entwicklung der Chaostheorie.....	7
2.2. Systemtheorie und Chaostheorie – Neuere Entwicklungen	8
2.3. Philosophische Reflexion über Chaos und Ordnung	8
2.3.1. Chaos	9
2.3.2. Ordnung.....	9
2.3.3. Die Übergänge vom Chaos zur Ordnung und zurück	9
2.4. Definition der Chaostheorie	10
2.5. Erklärung und Definition zentraler Begrifflichkeiten.....	11
2.5.1. Deterministisches Chaos	11
2.5.2. Kausalität und Sensitivität	12
2.5.2.1. Schwache versus starke Kausalität	13
2.5.2.2. Der Schmetterlingseffekt	13
2.5.3. Seltsame Attraktoren im Phasenraum	14
2.5.4. Die Idee der Selbstorganisation.....	15
3. Fraktale	16
3.1. Die Entdeckung der Fraktale	17
3.1.1. Georg Cantor	17
3.1.2. David Hilbert und Giuseppe Peano	17
3.1.3. Helge von Koch und Waław Sierpiński.....	18
3.1.4. Gaston Julia und Pierre Fatou	18
3.1.5. Benoît B. Mandelbrot	19
3.2. Was ist ein Fraktal?	19
3.3. Eigenschaften von Fraktalen	21
3.3.1. Rückkopplung und Iteration – Die Säulen der fraktalen Geometrie	21
3.3.1.1. Erklärung und Definition	21
3.3.1.2. Der rekursive Algorithmus zur Erzeugung der Koch-Kurve.....	22
3.3.2. Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz	23
3.3.2.1. Erklärung und Definition	23
3.3.2.2. Skaleninvarianz am Beispiel des Sierpiński-Dreiecks	24
3.3.3. Fraktale Dimension.....	24
3.3.3.1. Erklärung und Definition	24
3.3.3.2. Die Selbstähnlichkeitsdimension	26
3.3.3.3. Die Boxcounting-Dimension.....	27
4. Fraktale Formen in der Natur	28
4.1. Physik und Philosophie.....	28
4.2. Die Fibonacci-Folge und der Goldene Schnitt	29
4.3. Fraktales Wachstum.....	33
4.3.1. Von Pythagoreischen Bäumen und Barnsleys Farnen.....	33
4.3.1.1. Der Pythagoras-Baum	33
4.3.1.2. Der Barnsley-Farn.....	35
4.3.2. Fraktale zur Oberflächenvergrößerung	36
4.3.3. Fraktales Wachstum nichtbelebter Materie	37
4.4. Selbstorganisation am Beispiel der Bildung von Flussnetzwerken	38
5. Philosophische Reflexion über das Wesen der Natur	41
6. Erklärung	44
7. Quellenverzeichnis, Abbildungsverzeichnis und Anhänge	45

Vorwort

„Wolken sind keine Kugeln, Berge keine Kegel, Küstenlinien keine Kreise. Die Rinde ist nicht glatt – und auch der Blitz bahnt sich seinen Weg nicht gerade.“

Benoît B. Mandelbrot¹

Obwohl dieser von Benoît B. Mandelbrot in seinem Werk „Die fraktale Geometrie der Natur“ verbalisierte Gedanke auf den ersten Blick offensichtlich und trivial erscheint, so benötigte die Mathematik doch mehr als 2000 Jahre, um zu erkennen und zu akzeptieren, dass nicht jede der zahlreichen Formen, die die Natur hervorbringt, mit einfachen geometrischen Objekten vollkommen exakt beschreibbar ist.

Diese Reduktion und Kategorisierung des natürlichen Formenreichtums auf einige wenige geometrische Grundobjekte wie Linien, Geraden und Flächen geht auf den griechischen Mathematiker Euklid von Alexandria (300 v. Chr.) zurück, als dessen Lebenswerk heute die Sammlung und einheitliche Darstellung des mathematischen Wissens seiner Zeit gilt. Mit seinem Vorgehen der Systematisierung legte Euklid den ersten von zwei Grundsteinen, die gemeinsam das Fundament nahezu aller Wissenschaftsbereiche bilden. Den zweiten legte Galileo Galilei, indem er das empirische Experiment als gezielte Frage des beobachtenden Forschers an die Natur in die Wissenschaft eingeführt und damit ein Prinzip begründete, das in allen Wissenschaftsbereichen heute mehr denn je von herausragender Bedeutung ist: Die Abstraktion des speziell Empirischen hin zum allgemein Theoretischen.

Gänzlich unbewusst vom Geiste dieser Erkenntnis geleitet entwickelten sowohl Newton als auch Leibniz unabhängig voneinander die Differential- und Integralrechnung, mit der sie nicht nur die Approximation gekrümmter euklidischer Körper ermöglichten, sondern die Linearisierung zu einem *„wesentlichen Element der Komplexitätsreduktion im mathematisch physikalischen Denken“*² machten, und so wiederum abstrahierend tätig waren.

Am augenfälligsten aber tritt dieser Drang nach Vereinheitlichung und Abstraktion in Zusammenhang mit der Quantentheorie und der Relativitätstheorie in Erscheinung: Mit dem Versuch der Verbindung dieser beiden bisher unvereinbaren Theorien wollen die Physiker zu einer großen vereinheitlichten Theorie gelangen, mithilfe derer die vier

¹ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 13

² Schlichting, *Schöne fraktale Welt – Annäherung an ein neues Konzept der Naturwissenschaften*, 1992, S. 202-214

grundlegenden Wechselwirkungen in der Natur einheitlich beschrieben werden sollen, um so in vielerlei Hinsicht zu einem tieferen Verständnis des Wesens der Natur zu gelangen.

Der geneigte Beobachter wird an dieser Stelle unweigerlich den philosophischen Gehalt dieser eigentlich physikalischen Betrachtung feststellen und unumwunden zugeben müssen, dass der Grund warum wir Physik betreiben, im philosophischen Streben nach dem Erkennen des Urgrundes des Seins liegt, im Versuch des Erkennens dessen, „*was die Welt im Innersten zusammenhält*“³. Ganz im Sinne dieses Strebens und des Dranges nach Vereinheitlichung wurden im Laufe der Zeit stets neue Theorien entwickelt, welche ältere Theorien als Grenzfälle der neuen – allgemeineren – Theorien enthalten, und die Natur zwar zunehmend besser und allumfassender beschreiben, dabei aber durch Postulate wie beispielsweise der vierdimensionalen Raumzeit oder der Doppelnatur des Lichtes stets abstrakter werden, und sich somit unserer menschlichen Vorstellung der Wirklichkeit entziehen.

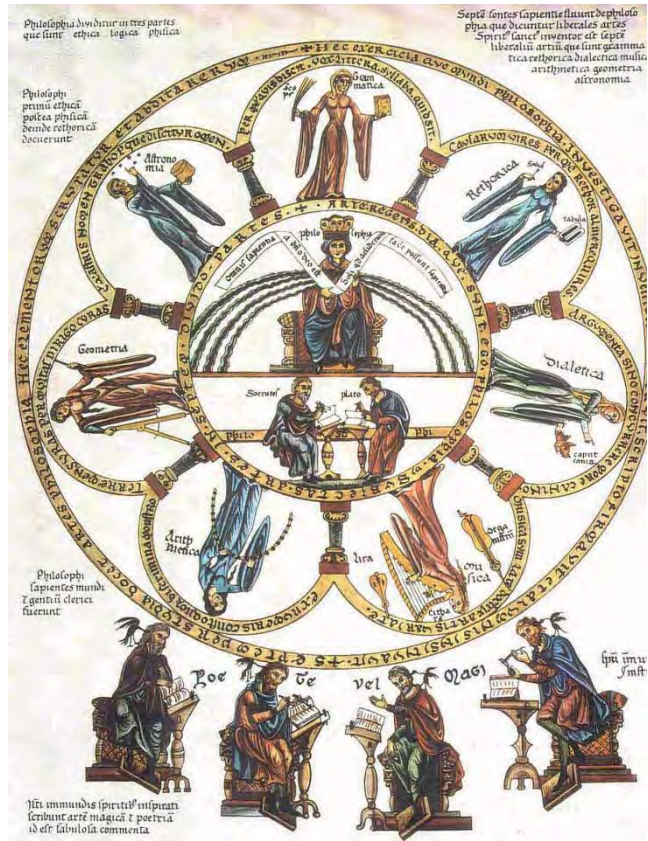


Abb. 1: Die Philosophie thront inmitten der sieben freien Künste

Ähnlich wie Albert Einstein erkannte, dass die Newton'sche Mechanik ein zu eingeschränktes Weltbild vermittelt und deshalb die Relativitätstheorie entwickelte, so zeigte Benoît B. Mandelbrot, dass die klassische euklidische Geometrie einer Erweiterung bedarf, um auch jene Objekte beschreiben zu können, die Euklid seinerzeit als amorph beiseiteließ. Dabei entdeckte er die fraktale Geometrie, die die Möglichkeit eröffnete, selbst komplexeste Formen, welche die Natur hervorbringt, auf einem einfachen Wege zu beschreiben. Diesen Weg, den Mandelbrot mit der Entdeckung der Fraktale beschritt, möchte ich – gespickt mit philosophischen Reflexionen – nachgehen, um so durch das Studium der natürlichen Fraktale zu versuchen, einen tieferen Einblick in das Wesen der Natur zu erhaschen.

³ Goethe, *Faust – Der Tragödie erster Teil*, 2000, S. 13

1. Einleitung

1.1 Motivation und Intention

Wie das Vorwort wahrscheinlich bereits Aufschluss gibt, liegt die Motivation für ebendiese Themenwahl darin begründet, sowohl einen Einblick in die Chaosforschung als noch relativ jungen aber hochinteressanten Teilbereich der Mathematik und Physik zu erhalten, als auch in dem Bestreben, durch das Studium fraktaler Strukturen in der Natur mehr über das Wesen der Natur selbst zu erfahren, um so zu einer umfassenderen Vorstellung der Welt zu gelangen, in der wir leben.

Meine Intention ist es daher – indem man sich die gemeinsamen Wurzeln von Physik und Philosophie vor Augen führt – die Verwandtschaft dieser beiden Disziplinen zu nutzen und wieder mehr ins Bewusstsein der Physik zu rücken, um so programmatisch an antike Naturphilosophen wie Demokrit anzuknüpfen, die durch die physikalische Beobachtung der Natur und die anschließende philosophische Reflexion des Beobachteten zu einem für diese Zeit höchst beachtenswerten Verständnis des Wesens der Natur gelangten.

1.2 Struktur der Arbeit

Die Arbeit lässt sich inhaltlich im Wesentlichen in drei Kapitel unterteilen, die jeweils aufeinander aufbauend, und in Umfang und Intensität anwachsend, im dritten Kapitel in der Besprechung der in der Natur auftretenden fraktalen Formen und Phänomene kulminieren. Um dem Titel der Arbeit gerecht zu werden, folgt daran anschließend die finale philosophische Reflexion über das Wesen der Natur, in der nämlich sowohl vom Standpunkt der Physik wie auch der Philosophie betrachtet werden soll.

Um dem unerfahrenen Leser den Einstieg in die Welt der natürlichen Fraktale zu erleichtern, gehen dem Schwerpunkt dieser Facharbeit zwei Kapitel voraus, in denen zuerst die Grundlagen der Chaostheorie und daran anschließend die Fraktale – als eine Entwicklung aus der Chaostheorie heraus – erörtert werden. Dabei hatte eine größtmögliche Stringenz in der Argumentation sowie ein möglichst lückenloses Ineinandergreifen der einzelnen Kapitel samt deren Unterpunkte höchste Priorität bei der Anfertigung dieser Arbeit. Zusätzlich dazu steht jedem Kapitel ein kurzer Prolog voran, der dem Leser einen kompakten Überblick über den Inhalt des jeweiligen Kapitels verschaffen soll, um so den Blick für die übergeordnete Themenstellung nicht aus den Augen zu verlieren.

2. Die Chaostheorie

Um spätere Thematiken verstehen zu können, soll dieses Kapitel dem Leser einen allgemeinen Überblick über die Chaostheorie vermitteln, indem die Chaostheorie zeitlich wie thematisch in die Historie der Naturwissenschaften eingeordnet wird sowie ihre Begründer kurz vorgestellt werden. Ziel dieses Kapitels soll es also sein, aus der Geschichte heraus die Notwendigkeit der Chaostheorie zu verstehen, sowie zu einer Definition für die Chaostheorie und ihrer zentraler Begriffen zu gelangen.

2.1 Historische Entwicklung der Chaostheorie

Anders als oft behauptet geht die *Chaostheorie* oder *Theorie komplexer Systeme* nicht allein auf den amerikanischen Mathematiker und Meteorologen Edward Norton Lorenz (* 1917; † 2008) ⁴ zurück, sondern gründet bereits auf dem französischen Mathematiker, theoretischen Physiker und Philosophen Henri Poincaré (* 1854; † 1912) ⁵, der durch die Bearbeitung des *n*-Körper-Problems anlässlich eines Preisausschreiben ⁶ nach der Korrektur eines wesentlichen Fehlers in seiner Arbeit erkannte, dass das Sonnensystem – anders als zuvor von Laplace vermutet – keineswegs stabil ist, sondern eine chaotische Dynamik zeigt, welche selbst bei vollständiger Kenntnis aller Naturgesetze, sowie der Inertialbedingungen aller Teilchen nicht vorausberechnet werden kann. Poincarés Ergebnisse wurden schließlich im Dezember 1890 in der 13. Ausgabe der *Acta Mathematica* veröffentlicht, die heute als die erste Abhandlung über die chaotische Dynamik komplexer Systeme angesehen wird.

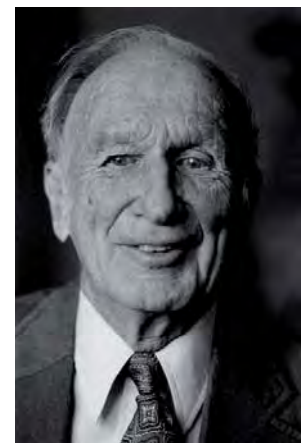


Abb. 2: Edward Norton Lorenz

Da Poincarés Berechnungen zur Instabilität der Planetenbahnen unseres Sonnensystems mit den Mitteln jener Zeit experimentell jedoch weder verifiziert noch falsifiziert werden konnten, geriet diese Entdeckung weitestgehend in Vergessenheit.

Erst mehr als ein halbes Jahrhundert später stieß der amerikanische Mathematiker und Meteorologe Edward N. Lorenz auf ein ähnlich instabiles Langzeitverhalten, als er ein System aus drei miteinander verbundenen Differentialgleichungen formulierte, mit dem

⁴ Maugh, *His computer riddle led to chaos theory*, 2008

⁵ Weisstein, *Poincaré, Henri*, 1996-2007

⁶ Zu Ehren des 60. Geburtstages des schwedischen Königs Oskar II. regte der schwedische Mathematiker Magnus Gösta Mittag-Leffler ein Preisausschreiben, bestehend aus vier bisher ungelösten mathematisch-physikalischen Einzelfragen an, von deren Beantwortung man sich neue Erkenntnisse in vielen Wissenschaftsbereichen erhoffte

er das Konvektionsverhalten von Fluiden bei Erhitzung vereinfacht modellierte, um so neue Erkenntnisse über die langfristige Vorhersagbarkeit des Wettergeschehens zu gewinnen. Bei der Iteration dieses Differentialgleichungssystems mit zwei um weniger als 0,025 % differierenden Startwerten zeigten sich Lorenz zwei komplett verschiedene Wetterlagen, die keinerlei Rückschlüsse auf einen gemeinsamen Ursprung zuließen. Trotz intensiver Fehlersuche und mehrfacher Berechnung konnte Lorenz keinen Fehler finden und musste die Ergebnisse als richtig annehmen. Diese veröffentlichte er schließlich 1963 unter dem Titel „*Deterministic Nonperiodic Flow*“⁷, und stellte sie zudem 1972 auf der Dezembertagung der American Association for the Advancement of Science in einer Rede unter dem Titel „*Predictability: Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*“⁸, einem breiten Wissenschaftspublikum vor⁹, womit der er dem *Schmetterlingseffekt* zu Weltruhm verhalf.

2.2 Systemtheorie und Chaostheorie – Neuere Entwicklungen

Wurde die Chaostheorie anfangs noch als eigenständige Theorie angesehen, so wird sie heute meist als Teildisziplin der Systemtheorie aufgefasst, die als „*interdisziplinäres Erkenntnismodell*“¹⁰ neben der Chaostheorie eine Vielzahl weiterer Theorien und Effekte umfasst. Aufgrund eben dieser Universalität der Systemtheorie eignet sie sich sowohl zur Analyse der Strukturen und Funktionen komplexer Systeme, wie auch zur Vorhersage der langfristigen Dynamik derartiger Systeme. Dabei wird meist nicht mehr zwischen den einzelnen Theorien unterschieden, sodass beispielsweise die Idee der Selbstorganisation komplexer Systeme, welche ursprünglich aus der *Theorie komplexer adaptiver Systeme* stammt, auch in der Chaostheorie zur Erklärung beobachteter Effekte herangezogen wird. Der sich dabei einstellende Erfolg allerdings rechtfertigt dieses Vorgehen und ist nur ein weiteres Indiz dafür, dass die Fusion der Einzeltheorien zur Systemtheorie der richtige Schritt war. So findet die Systemtheorie heute nicht nur in den Naturwissenschaften Anwendung, sondern ebenso in der Soziologie oder den Wirtschaftswissenschaften.

2.3 Philosophische Reflexion über Chaos und Ordnung

Bevor eine Definition der Chaostheorie gegeben wird, sollte zuerst eine kurze philosophische Reflexion über die zentralen Begriffe *Chaos* und *Ordnung* im Mittelpunkt

⁷ Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, 1963

⁸ Lorenz, *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*, 1972

⁹ Riegelman, *Butterfly Wings and Burning Children*, 2007

¹⁰ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Systemtheorie*

der Betrachtung stehen, um so zu einem umfassenderen Verständnis des Phänomens *Chaos* zu gelangen.

2.3.1 Chaos

Das Wort *Chaos* (χάος) stammt aus dem Griechischen und wurde in der dortigen Naturphilosophie ursprünglich als „der unendliche leere Raum“¹¹, „die gestaltlose Urmasse des Weltalls“¹², sowie später als „Schlund“¹³, „Leere“¹⁴ oder „gähnender Abgrund“¹⁵ übersetzt, und war gemäß den griechischen Weltentstehungsmythen der „erste Zustand der Welt“¹⁶. In neuerer Zeit entwickelte sich daraus die heute alltäglich gebräuchliche Bedeutung des Wortes Chaos als „Zustand völliger Unordnung“ oder „Regellosigkeit“.

Eine weniger negativ konnotierte, koexistente Bedeutung des Wortes Chaos ist die Interpretation als „Gleichmäßigkeit“, wie sie beispielsweise bei der Erklärung der Brownschen Teilchenbewegung in der Thermodynamik Verwendung findet.

2.3.2 Ordnung

Das natürliche Antonym des Chaos stellt die *Ordnung* dar, die sich vom griechischen Wort *Kosmos* (κόσμος) ableitet, und in der antiken Philosophie als „harmonische und wohlgegliederte (Welt-)Ordnung“¹⁷ übersetzt wurde. Heute werden mit Ordnung meist Begriffe wie „Regelmäßigkeit“ oder „Systematik“ assoziiert, da Ordnung als Zustand oder Erscheinung aufgefasst wird, der ein logisch nachvollziehbarer Algorithmus zugrunde liegt, mit dem eben diese Ordnung erzeugt wurde. Geordnete Zustände zeichnen sich durch eine innere Struktur sowie durch ein erkennbares Muster aus.

2.3.3 Die Übergänge vom Chaos zur Ordnung und zurück

Anders als die eben sorgfältig herbeigeführte Abgrenzung der Begriffe Chaos und Ordnung gegeneinander impliziert, besteht ein sehr enger Zusammenhang zwischen beiden Begriffen. So kann beispielsweise die chaotische Regellosigkeit als Gleichmäßigkeit und damit als Ordnung interpretiert werden, was eine Abgrenzung zur geordneten Regelmäßigkeit bereits erschwert. Auch die Übergänge sowohl vom Chaos zur Ordnung als auch von der Ordnung ins Chaos sind fließend, und damit nicht exakt definierbar. Ein alltägliches, aber sehr passendes Beispiel hierfür ist das Erwärmen viskoser Flüssigkeiten in

¹¹ - ¹⁶ Brockhaus Enzyklopädie, *Chaos*, 1986, Band 4, S. 418

¹⁷ Brockhaus Enzyklopädie, *Kosmos*, 1986, Band 12, S. 400

einem Kochtopf: Vor der Erwärmung bewegen sich alle Moleküle vollkommen regellos und chaotisch. Sobald mit dem Erwärmen begonnen wird, entsteht ein Temperaturgefälle zwischen den unteren und oberen Flüssigkeitsschichten, welches das System durch Wärmeleitung auszugleichen versucht. Wird weiterhin erhitzt, so ist es dem System durch Wärmeleitung nicht möglich, die sich stets vergrößernde Temperaturdifferenz auszugleichen, sodass das System auf diesen äußeren Zwang durch die Ausbildung hochgeordneter Bénard-Konvektionszellen reagiert, mithilfe derer die Temperaturdifferenz effektiver ausgeglichen werden kann. Führt man dem System jedoch unablässig weitere Energie zu, so ist weder durch Wärmeleitung noch durch die Ausbildung von Bénard-Konvektionszellen eine effektive Minderung der Temperaturdifferenz möglich, sodass die Flüssigkeit zu sprudeln und zu verdampfen beginnt.

Die in diesem Beispiel auftretenden Übergänge vom Chaos in einen geordneten Zustand und der abermalige Übergang ins Chaos demonstrieren eindrucksvoll die Schwierigkeiten, die eine zu scharfe Abgrenzung der Begriffe Chaos und Ordnung mit sich bringt. Chaos und Ordnung dürfen daher nicht als Antagonisten angesehen werden, sondern müssen vielmehr als einander generierend und zusammengehörig verstanden werden.

2.4 Definition der Chaostheorie

Nachdem nun das Bewusstsein für die Herkunft, die ursprünglichen und aktuellen Bedeutungen, sowie etwaige auftretende Schwierigkeiten bei der Verwendung dieser Begriffe geschärft wurde, soll der Versuch unternommen werden, die Chaostheorie so kurz, prägnant und allgemein wie möglich zu definieren, dabei aber so ausführlich wie nötig auf ihre vielen speziellen Facetten einzugehen.

Definition

Die *Chaostheorie* ist eine mathematisch-physikalische Theorie innerhalb der Systemtheorie, die sich mit der Analyse, Berechnung und Vorhersage der Dynamik komplexer deterministisch-chaotischer Systeme befasst. Die im Zuge der Entwicklung der Chaostheorie entdeckte dritte Kategorie der Kausalität, der *Schmetterlingseffekt*, zeigte, dass sich trotz der Gültigkeit der Kausalität und des damit einhergehenden Determinismus, in bestimmten Systemen langfristig eine nichtlineare – chaotische – Dynamik ausbildet, die sensitiv von den Anfangsbedingungen abhängt und daher als *deterministisch-chaotisch* bezeichnet wird. Dabei streben deterministisch-chaotische Systeme einen oder mehrere stabile Zustände (Attraktoren) an, in denen sie bei Erreichen derselben aber nicht

verharren, sondern ohne erkennbare Regelmäßigkeit Stadien hoher Ordnung und Regelmäßigkeit, aber auch chaotische Zustände durchlaufen.

Natürlich bedarf diese Definition samt aller in ihr enthaltenen Fachbegriffe einer gründlichen Erklärung, um verstehen zu können, was genau ein deterministisch-chaotisches System ist, und durch welche Eigenschaften es sich auszeichnet.

2.5 Erklärung und Definition zentraler Begrifflichkeiten

2.5.1 Deterministisches Chaos

Wie die obige Definition bereits durch das häufige Auftreten des Begriffes des *Deterministischen Chaos* nahelegt, handelt es sich dabei um den zentralen Aspekt der Chaostheorie. Obwohl der Begriff des *Deterministischen Chaos* auf den ersten Blick ein Widerspruch in sich zu sein scheint, da ein deterministischer Vorgang per definitionem berechenbar ist, und damit exakt das Gegenteil des nicht berechenbaren Chaos darstellt, schließen sich Determinismus und Chaos dennoch nicht aus.

Der *Determinismus* im physikalischen Sinne geht davon aus, dass sämtliche natürliche Prozesse mittels strikter, „*nicht-probabilistischer Naturgesetze*“¹⁸ lückenlos erklärt, und damit berechnet werden können. Der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace ging sogar davon aus, dass man bei Kenntnis aller Naturgesetze sowie der Initialbedingungen eines Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt jeden vergangenen und zukünftigen Zustand dieses Systems errechnen könnte. Spätestens seit Heisenbergs Entdeckung der Unschärferelation auf Quantenebene und der Born'schen Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion, die die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik nach sich zog und das Zufallselement als wesentlichen Bestandteil in die Physik einführte, musste diese als Laplace'scher Dämon bekannt gewordene Weltsicht als falsch akzeptiert werden. In Zusammenhang mit dem weiter oben bereits diskutierten Wesen des Chaos ergibt sich folgende Definition für das *Deterministische Chaos*:

Definition

Als *Deterministisches Chaos* bezeichnet man die irregulär oder gar zufällig erscheinende Dynamik eines komplexen nichtlinearen Systems, die als Folge der Nicht-Reproduzierbarkeit exakt gleicher Ausgangsbedingungen, der Kompliziertheit der kausalen Beziehungen der Elemente innerhalb des Systems,

¹⁸ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Determinismus*

sowie der Beeinflussung durch die unüberschaubare Anzahl äußerer Faktoren auftritt.

Hierzu sei erwähnt, dass die scheinbare Zufälligkeit in der zeitlichen Entwicklung eines Systems lediglich ein subjektiver Eindruck ist, der auf die mangelnde Fähigkeit zur präziseren Bestimmung der Ausgangsbedingungen zurückzuführen ist. Obwohl dies im klassischen Sinne als rein messtechnisches Problem erscheint, ist dem Bestreben, die Ausgangsbedingungen immer genauer zu bestimmen, spätestens auf Quantenebene durch die Heisenberg'sche Unschärferelation eine unüberwindbare Grenze gesetzt.

2.5.2 Kausalität und Sensitivität

Sehr eng mit dem Determinismus verwandt ist das *Kausalitätsprinzip*, das nach heutigem Stand des Wissens ein grundlegendes Prinzip der Natur darstellt und somit keineswegs verletzt werden sollte.

Definition

Unter dem Begriff der *Kausalität*¹⁹ versteht man den logischen und zeitlichen Zusammenhang zwischen einer *Ursache* und der von dieser Ursache ausgelösten *Wirkung*. Dabei bleibt die zeitliche Reihenfolge stets gleich, sodass auf eine Ursache immer eine Wirkung folgt.

Im Kontext der Chaostheorie ist es von besonderer Bedeutung, darauf hinzuweisen, dass durch die Vorstellung des deterministischen Chaos das Kausalitätsprinzip keineswegs ad absurdum geführt wird, sondern neben der *schwachen* und der *starken Kausalität* um eine dritte Kategorie – den sogenannten *Schmetterlingseffekt* – erweitert wird, der unter anderem auf der sensitiven Abhängigkeit eines Systems von seinen Anfangsbedingungen beruht.

Definition

Als *Sensitivität*²⁰ bezeichnet man die Eigenschaft deterministisch-chaotischer Systeme, dass bereits kleinste – meist nicht messbare – Abweichungen in den Anfangsbedingungen eines Systems bei mehrfacher Ausführung im Laufe der Zeit jeweils komplett verschiedene Systemzustände erzeugen, die keinerlei Verwandtschaft vermuten lassen.

¹⁹ Stangl, *Was ist Kausalität?*, 2010

²⁰ Peitgen, *Chaos – Bausteine der Ordnung*, 1994, S. 90f, S. 98

2.5.2.1 Schwache versus starke Kausalität

Die erste Kategorie der Kausalität ist die so genannte *schwache Kausalität*, welche folgendermaßen definiert ist:

Definition

Von *schwacher Kausalität* spricht man, wenn *exakt gleiche Ursachen stets exakt gleiche Wirkungen* zur Folge haben.²¹

Zur Verdeutlichung: Wird ein Geschoss immer unter dem exakt gleichen Winkel bei exakt gleicher Abschussgeschwindigkeit und unter auch sonst gleichbleibenden Bedingungen abgefeuert, so wird es stets im selben Punkt landen.²² Da diese Forderung nach exakt gleichen Versuchsbedingungen praktisch nicht realisierbar ist, ist die schwache Kausalität lediglich ein theoretisches Konstrukt, welches nur für einen sehr kleinen Teil der Beobachtungen eine hinreichend genaue Beschreibung ermöglicht und daher als *schwach* bezeichnet wird.

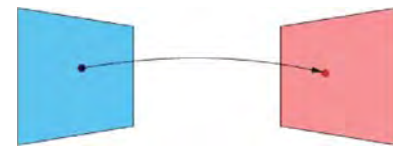


Abb. 3: Schematische Darstellung der schwachen Kausalität

Definition

Die *starke Kausalität* ist die verallgemeinerte Form der schwachen Kausalität und ist in der Lage, alle Systeme hinreichend genau zu beschreiben, in denen *ähnliche Ursachen stets ähnliche Wirkungen* zur Folge haben.²³

Hierzu folgende dem obigen Beispiel analoge Situation: Wird ein Geschoss gegenüber einem vorhergegangenen Versuch mit nur minimal veränderter Geschwindigkeit und unter einem nur geringfügig veränderten Winkel abgefeuert, so wird auch der Auftreffpunkt nur unwesentlich vom vorherigen Auftreffpunkt abweichen. Kleine Veränderungen in den Anfangsbedingungen eines Systems haben auch nur kleine Änderungen im Endzustand zur Folge.²⁴ Da es diese Form des Kausalitätsprinzips erlaubt, einen sehr großen Teil der Beobachtungen zu beschreiben, wird es als *stark* bezeichnet.

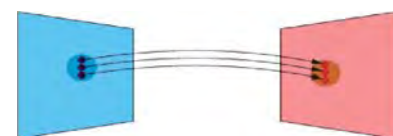


Abb. 4: Schematische Darstellung der starken Kausalität

2.5.2.2 Der Schmetterlingseffekt

Neben diesen beiden Kategorien der Kausalität existiert noch eine dritte – fälschlicherweise oft nicht mit der Kausalität in Verbindung gebrachte Kategorie: Der *Schmetterlingseffekt*.

²¹⁻²⁴ Leitner/Finckh/Fritsche, *Starke und Schwache Kausalität, Schmetterlingseffekt*

Dieser wurde – wie bereits erwähnt – erstmals von Edward N. Lorenz 1963 bei der Simulation des Wettergeschehens mittels eines iterierten Differentialgleichungssystems entdeckt, als er bei der Iteration zweier sich lediglich um 0,025 % unterscheidender Ausgangswerte ²⁵ komplett verschiedene Langzeitentwicklungen feststellte. Die Erkenntnis, dass in deterministisch-chaotischen Systemen bereits kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen erhebliche Änderungen in den Ergebnissen hervorrufen können, inspirierte Lorenz zu der symbolischen Metapher, dass ein Schmetterling mit seinem Flügelschlag in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen könnte ²⁶. Zudem erkannte Lorenz, dass der Schmetterlingseffekt – wie bereits in Punkt 2.5.1 „Deterministisches Chaos“ erwähnt – ein der Natur immanentes Phänomen darstellt, dessen Auswirkungen durch genaueres Messen lediglich hinausgezögert, nicht aber grundsätzlich beseitigt werden können.

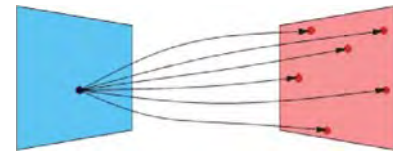


Abb. 5: Schematische Darstellung des Schmetterlingseffektes

Definition

Als *Schmetterlingseffekt* bezeichnet man die Auswirkungen der Sensitivität auf ein nichtlineares System, die schließlich deterministisch-chaotische Phänomene zur Folge haben.

2.5.3 Seltsame Attraktoren im Phasenraum

Ähnlich wie sich jede mathematische Funktion graphisch darstellen lässt, ist es auch möglich für ein iteriertes Differentialgleichungssystem, das eine deterministisch-chaotische Dynamik an den Tag legt, einen Graphen (Trajektorie) zu erstellen.

Definition

Als *seltsamen Attraktor* bezeichnet man diejenige Untermenge des Phasenraums (Bereich) um den bevorzugten Endzustand (Attraktor) herum ²⁷, die durch die nichtlineare Dynamik eines deterministisch-chaotischen Systems nicht mehr verlassen wird. Die wesentlichen Eigenschaften eines *seltsamen Attraktors* sind dabei sein *festgelegter Einzugsbereich (Attraktionsgebiet)*, die *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen*, sein *Mischungsverhalten*, die

²⁵ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Schmetterlingseffekt*

²⁶ Tatsächlich verwendete Lorenz anfangs die Metapher des „Flügelschlages einer Möwe“, um die sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen zu verbildlichen; erst später übernahm Lorenz die von seinem Assistenten Philip Merilees vorgeschlagene Bezeichnung „Schmetterlingseffekt“ und erlangte damit Weltruhm

²⁷ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Attraktor*

*fraktalen Ränder des Attraktors, sowie seine daraus folgende fraktale Dimension.*²⁸

Ein *seltamer Attraktor* ist also jenes Gebilde, das entsteht, wenn sich die Trajektorie dem attraktiv wirkenden Punkt (Attraktor) unendlich oft beliebig stark angenähert hat. Voraussetzung für die Ausbildung eines seltsamen Attraktors ist, dass der Startwert der Iteration im Einzugsbereich des Attraktors liegt. Ist dies der Fall, so kann die Trajektorie jeden Punkt des seltsamen Attraktors durchlaufen (Mischungseigenschaft) und den seltsamen Attraktor ausbilden. Faszinierend dabei ist, dass – vorausgesetzt die Startwerte verschiedener Iterationen liegen im Attraktionsgebiet – die Trajektorie stets individuell verläuft, auf lange Sicht aber immer denselben seltsamen Attraktor ausbildet.²⁹

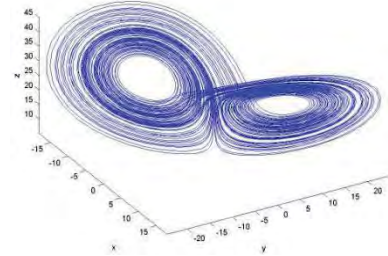


Abb. 6: Dreidimensionale Ansicht des Lorenz-Attraktors mit zwei attraktiv wirkenden Punkten

2.5.4 Die Idee der Selbstorganisation

Wie bereits in der Definition der Chaostheorie kurz erwähnt, ermöglicht erst die Systemtheorie mit ihren zahlreichen Subtheorien eine umfassende Beschreibung komplexer Systeme und Strukturen, indem die Subtheorien verknüpft und so Erklärungsansätze unterschiedlicher Theorien auf eine spezielle Erscheinung angewandt werden. Da für die Erklärung und das Verständnis einiger natürlicher Fraktale an späterer Stelle ebendieses Vorgehen vonnöten ist, soll die eigentlich aus der um 1990 entwickelten *Theorie komplexer adaptiver Systeme* stammende *Idee der Selbstorganisation komplexer dynamischer Systeme* kurz erklärt und definiert werden.

Definition

Als *Selbstorganisation komplexer dynamischer Systeme* bezeichnet man das spontane – ohne gezieltes äußeres Zutun – Auftreten neuer, effizient und stabil erscheinender räumlicher, zeitlicher, und funktionaler Strukturen³⁰ in der belebten wie auch der unbelebten Natur. Das Phänomen der Selbstorganisation ist ein emergentes Phänomen und damit eine Folge aus der Wechselwirkung und

²⁸ Auf die fraktalen Eigenschaften seltsamer Attraktoren wird unter Punkt 3.1.4 „Gaston Julia und Pierre Fatou“ kurz eingegangen

²⁹ Peitgen, *Chaos – Bausteine der Ordnung*, 1994, S. 232

³⁰ Münster, *Selbstorganisation in Systemen fern vom Gleichgewicht I, II (Nichtlineare Physik I, II)*, 2007

Interaktion der Systemkomponenten untereinander. Dabei lassen sich die strukturbildenden emergenten Eigenschaften des Systems nicht zwingend aus den Eigenschaften der Systemkomponenten ableiten (*Fulguration*³¹), die eo ipso aus anfänglichem Chaos hochgeordnete Strukturen zu bilden vermögen. Systeme, die Selbstorganisation zeigen, sind in der Regel *autonom*³², *komplex*³³, *redundant*³⁴ und *selbstreferenziell*³⁵, was eine mathematische Beschreibung nahezu unmöglich macht.

Ohne an dieser Stelle näher auf selbstorganisierte Systeme eingehen zu wollen, sei dennoch sowohl auf die in Punkt 2.3.3 „Chaos und Ordnung“ bereits angesprochenen Bénard-Konvektionszellen als auch auf die in Punkt 4.4 „Selbstorganisation am Beispiel der Bildung von Flussnetzwerken“ näher erörterten Phänomene bei der Bildung von Flussnetzwerken verwiesen, die als Paradebeispiele für selbstorganisierte Systeme angeführt werden können.

3. Fraktale

Nachdem im vorhergegangenen Kapitel ein Überblick über die Grundlagen der Chaostheorie gegeben wurde, soll dieses Kapitel nun ganz im Zeichen des wahrscheinlich populärsten Auswuchses der Chaostheorie stehen: Den *Fraktalen*. Da für das Verständnis dieser farbenfrohen und formenreichen Gebilde gewisse Grundkenntnisse unerlässlich sind, wird zuerst auf diejenigen Personen und deren Entdeckungen eingegangen, die entscheidend zur Entwicklung der Fraktale beigetragen haben, um im Anschluss daran anhand einiger ausgewählter Beispiele die wesentlichen Charakteristika der Fraktale aufzuzeigen und zu definieren. Abschließend wird die Verknüpfung der Chaostheorie mit den Fraktalen vollzogen, indem die Entwicklung der Fraktale aus der Chaostheorie heraus eine genauer beschrieben wird.

³¹ Als *Fulguration* (nach Konrad Lorenz) bezeichnet man das schon durch Aristoteles („Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile“) verbalisierte Prinzip, wonach bestimmte Systeme spontan Eigenschaften an den Tag legen, die nicht unmittelbar aus den Eigenschaften der Systemkomponenten abgeleitet werden können

³² *Autonomie*: Sämtliche Beziehungen und Interaktionen innerhalb des Systems gehen vom System selbst aus

³³ *Komplexität*: Im Sinne der Chaostheorie wird ein System als komplex bezeichnet, in dem die Systemkomponenten permanent wechselseitig verknüpft sind

³⁴ *Redundanz*: In selbstorganisierenden Systemen werden alle Systemkomponenten als gleichartig angenommen

³⁵ *Selbstreferenz*: Als Selbstreferenz wird die Eigenschaft selbstorganisierender Systeme bezeichnet, dass jegliche spontane Änderungen sowohl auf das System zurückwirken als auch Ausgangspunkt für weitere spontane Änderungen wirken können

3.1 Die Entdeckung der Fraktale

Die Entdeckung der Fraktale darf – wie auch die Entwicklung der Chaostheorie selbst – weder als das Verdienst einer einzelnen Person angesehen werden, noch kann eine genaue Datierung der Entdeckung erfolgen, wie es beispielsweise bei der Veröffentlichung der Speziellen Relativitätstheorie durch Albert Einstein möglich ist. Erst die stete Weiterentwicklung des zeitabhängigen Wissens um die Fraktale durch viele Forschergenerationen hindurch brachte jenen Fraktalbegriff hervor, der uns heute vertraut erscheint.

Da die Geschichte der Fraktale deren Wesen und Eigenschaften am besten zu beschreiben vermag, soll in diesem bewusst ausführlicher gehaltenen Abschnitt die Entwicklung der Fraktale von Cantor über Sierpiński bis hin zur von Mandelbrot begründeten fraktalen Geometrie nachgezeichnet werden.

3.1.1 Georg Cantor

Die Geschichte der Fraktale beginnt in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, als der deutsche Mathematiker Georg Cantor (* 1845; † 1918) ³⁶ infolge seiner intensiven Beschäftigung mit Mengen in der Zeit um 1880 die nach ihm benannte *Cantor-Menge* entdeckte. Obwohl diese durch einen sehr einfachen rekursiven Algorithmus erzeugbare Menge zwar nicht der intuitiven Vorstellung eines farbenfrohen und formenreichen Fraktals entspricht, birgt sie dennoch bereits zwei der wesentlichen Charakteristika von Fraktalen in sich: Die Erzeugung mittels eines *rekursiv angewandten Algorithmus* sowie die *Selbstähnlichkeit* oder *Skaleninvarianz*. Diese Eigenschaften von Fraktalen werden zusammen mit weiteren an späterer Stelle Gegenstand genauerer Betrachtung sein.

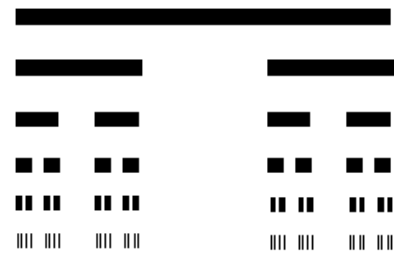


Abb. 7: Die Cantor-Menge

3.1.2 David Hilbert und Giuseppe Peano

Nur etwa eine Dekade nach Cantors Entdeckung entwickelten unabhängig voneinander der deutsche Mathematiker David Hilbert (* 1862; † 1943) ³⁷ und der italienische Mathematiker Giuseppe Peano (* 1858; † 1932) ³⁸ so genannte *raumfüllende Kurven*, die in ihren Anfängen ob ihrer neuen und bisher ungeahnten Qualität als „*Monsterkurven*“

³⁶ Peitgen, *Bausteine des Chaos – Fraktale*, 1992, S. 85

³⁷ Ebd., S. 115

³⁸ Ebd., S. 115

bezeichnet wurden, da sie Eigenschaften an den Tag legten, die bisher bekannte Kurven nicht besaßen. Das Außergewöhnliche dieser Kurven besteht darin, dass sie als *eindimensionale Linie zweidimensionale Flächen* oder gar *dreidimensionale Räume* komplett auszufüllen vermögen, indem sie jeden Punkt der Ebene oder Fläche durchlaufen³⁹. Diese neue Entdeckung allerdings brachte die Notwendigkeit der Neudefinition der Dimension mit sich: Füllt eine Kurve ein Einheitsquadrat vollständig aus, so würde dies bedeuten, dass die Dimension der Kurve gleich der Dimension des Einheitsquadrates wäre, was einen offensichtlichen Widerspruch darstellt. Mit der Erweiterung des bisherigen Dimensionsbegriffes um so genannte *gebrochene* oder *fraktale Dimensionen* wurde dieser Widerspruch aufgelöst.

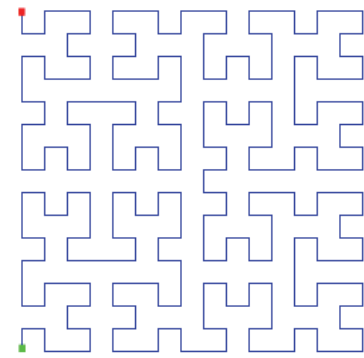


Abb. 8: Die Hilbert-Kurve: Hier markiert das rote Quadrat den Start-, das grüne Quadrat den Endpunkt der Kurve

3.1.3 Helge von Koch und Waław Sierpiński

Mit der *Koch-Kurve* (1904)⁴⁰ und dem *Sierpiński-Dreieck* (1916)⁴¹, die jeweils nach ihrem Entdecker benannt worden sind, veröffentlichten der schwedische Mathematiker Helge von Koch (* 1870; † 1924)⁴² und der polnische Mathematiker Waław Sierpiński (* 1882; † 1969)⁴³ zu Beginn des 20. Jahrhunderts erstmals flächige Fraktale, anhand derer die drei ein Fraktal definierenden Eigenschaften besonders gut studiert werden können. Aus diesem Grunde werden beide Fraktale erst an späterer Stelle als Beispiele dienen, und im Zuge dessen genauer erklärt und beschrieben.

3.1.4 Gaston Julia und Pierre Fatou

Etwa zur selben Zeit experimentierten die beiden französischen Mathematiker Gaston Maurice Julia (*1893; † 1978)⁴⁴ und sein Konkurrent Pierre Fatou (* 1878; † 1929)⁴⁵ mit der *Iteration komplexer Funktionen*. Dabei entdeckte Julia 1919 bei der Iteration der komplexen Funktion $f_c(z) = z^2 + c$ ein merkwürdig chaotisches Verhalten der Iterationsverläufe, woraus er keinerlei Muster oder gar Gesetzmäßigkeit ableiten konnte.

³⁹ Hierbei sei auf das auf der CD enthaltene Java-Applet zur Hilbert-Kurve verwiesen

⁴⁰ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 107

⁴¹ Ebd., S. 98

⁴² Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Helge von Koch*

⁴³ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 98

⁴⁴ Peitgen, *Chaos – Bausteine der Ordnung*, 1994, S. 352

⁴⁵ Ebd., S. 353

Julia hatte entdeckt, dass es in Abhängigkeit der komplexen Konstante c einerseits eine Menge an Startwerten z gibt, die bei Iteration ins Unendliche streben, d.h. deren Attraktor der unendlich ferne Punkt ist, und gleichzeitig eine Menge an Startwerten z existiert, die bei Iteration einem wohldefinierten Wert zustreben. Erstere Menge nennt man die *Fluchtmenge* F_c , zweitere die *Gefangenenmenge* G_c . Der gemeinsame Rand

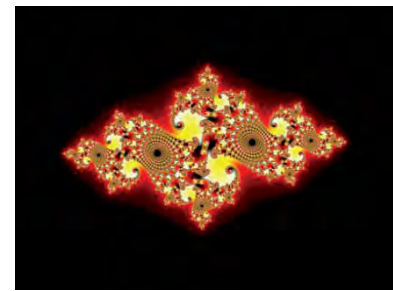


Abb. 9: Eine Julia-Menge

zwischen beiden Mengen schließlich ist fraktal und wird als die vom komplexen Parameter c abhängige *Julia-Menge* J_c bezeichnet.⁴⁶ Analog zur Gefangenenmenge verhält sich auch die Menge der Punkte im Attraktionsgebiet eines seltsamen Attraktors. Erst mit dem Aufkommen von für jedermann erschwinglichen Computern war es möglich, die einst ausschließlich theoretischen Überlegungen und Berechnungen Julias zu visualisieren und jenen farbenfrohen Formenreichtum zu erzeugen, den die *Julia-Mengen* bieten.

3.1.5 Benoît B. Mandelbrot

Bei der Suche nach einer Möglichkeit, die vielfältigen Julia-Mengen zu klassifizieren, entdeckte der französisch-US-amerikanische Mathematiker Benoît B. Mandelbrot (* 1924; † 2010)⁴⁷ im Jahre 1979 die nach ihm benannte *Mandelbrot-Menge*. Diese Menge umfasst alle komplexen Parameterwerte c der komplexen Funktion $f_c(z) = z^2 + c$, für die sich zusammenhängende *Gefangenenmenge* G_c und damit zusammenhängende *Julia-Mengen* J_c ergeben. Die auch als „Apfelmännchen“ bekannt

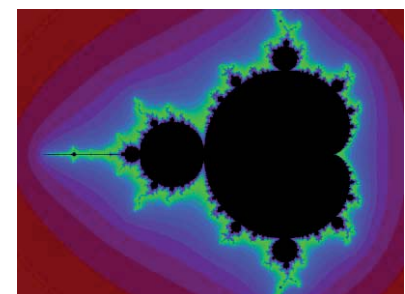


Abb. 10: Die als „Apfelmännchen“ bekannt gewordene Mandelbrot-Menge

gewordene Mandelbrot-Menge stellt damit eine Ordnung innerhalb der Julia-Mengen her. Erst durch diese Entdeckung Mandelbrots erlangten die Julia-Mengen jene Würdigung, die ihnen jahrzehntelang verwehrt blieb, und bereiteten somit ihren Vätern Gaston Julia und Pierre Fatou postum Weltruhm.

3.2 Was ist ein Fraktal?

Nachdem auf die Geschichte sowie die bedeutendsten Persönlichkeiten und deren Entdeckungen eingegangen wurde, besteht nun der nächste Schritt darin, die

⁴⁶ Peitgen, *Chaos – Bausteine der Ordnung*, 1994, S. 371

⁴⁷ Lindinger, *Zum Tod von Benoît Mandelbrot – Formeln sind schön*, 2010

Eigenschaften von Fraktalen kennenzulernen, um so zu einer Definition der Fraktale zu gelangen. Anders als aufgrund des mathematischen Charakters der Fraktale anzunehmen wäre, existiert bisher keine exakte und allgemeingültige Definition der Fraktale.

Eben dieser Umstand macht es umso bedeutender, die Geschichte sowie die chronologische Entwicklung der Fraktale samt ihrer Entdecker bis zum heutigen Tag zu kennen und zu verstehen. Trotz der Schwierigkeit, eine allgemeingültige und prägnante Definition zu finden, möchte ich mich dennoch – unter Zuhilfenahme mehrerer bereits erfolgter „Beschreibungen“ der Fraktale – daran versuchen, die Fraktale anhand ihrer Eigenschaften zu definieren:⁴⁸

Definition

Das Wort *Fraktal* ist ein von Benoît B. Mandelbrot geschaffenes Kunstwort, das sich vom lateinischen Adjektiv *fractus* („gebrochen“; „irregulär“) ⁴⁹ sowie dem diesem Adjektiv zugrundeliegenden Verb *frangere* („[in Stücke] brechen“) ⁵⁰ ableitet. Unter dem Begriff *Fraktal* subsumiert man heute natürliche und künstliche Objekte sowie geometrische Muster, die mittels eines *rekursiven Algorithmus durch Rückkopplung und Iteration erzeugbar* sind, einen *hohen Grad an Selbstähnlichkeit (in Spezialfällen: Skaleninvarianz)* aufweisen und sich darüber hinaus durch eine *gebrochene (fraktale) Dimension* auszeichnen. ⁵¹,
⁵² Insbesondere Mandelbrot selbst verwendet vor allem zur Beschreibung der Julia- und Mandelbrot-Mengen auch den Begriff der *fraktalen Menge*.

Hierzu sei erwähnt, dass die Begriffe „*Fraktal*“ und „*fraktale (Punkt-)Menge*“ synonym verwendet werden können. Aus Gründen der Anschaulichkeit jedoch wird bei Objekten wie dem Sierpiński-Dreieck, der Koch-Kurve, der Hilbert- und Peano-Kurve sowie bei natürlichen Gebilden ausschließlich von *Fraktalen* gesprochen, wohingegen bei offensichtlichen Punktmengen wie den Julia- und Mandelbrot-Mengen sowie den Punktmengen, die einen seltsamen Attraktor bilden, auch der Begriff der *fraktalen (Punkt-) Mengen* in Gebrauch ist.

Wie nachfolgendes Zitat zeigt, bereitet es selbst führenden Wissenschaftlern Schwierigkeiten, eine exakte und umfassende Definition der Fraktale zu formulieren:

⁴⁸ Wohlgemuth, *Definition eines Fraktals?*, 2007

⁴⁹ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 16

⁵⁰ Ebd., S. 16

⁵¹ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Fraktal*

⁵² Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 373/374

„In general, we call a physical object fractal, if measuring its volume, surface or length [...] [makes it impossible] to obtain a well converging finite measure for these quantities [...] over several orders of magnitude.”⁵³

Selbst Mandelbrot kommt seiner vollmundiger Ankündigung, den Begriff der *fraktalen Menge* (= Fraktal) exakt definieren zu wollen, im Verlaufe seines Werkes „Die fraktale Geometrie der Natur“ nur in unzureichendem Maße nach und definiert letztendlich die Fraktale ebenfalls über ihre Eigenschaften und durch das Anführen von Beispielen.

3.3 Eigenschaften von Fraktalen

Im Folgenden werden die drei oben angesprochenen, zentralen Eigenschaften der Fraktale genauer erklärt und schließlich definiert.

3.3.1 Rückkopplung und Iteration – Die Säulen der fraktalen Geometrie

Diejenige Eigenschaft, welche am unmittelbarsten die Verwandtschaft zwischen der Chaostheorie und den Fraktalen zeigt, ist deren *Erzeugung mittels eines rekursiv angewandten Algorithmus*.

3.3.1.1 Erklärung und Definition

Im einfachsten Falle ist ein solcher rekursiver Algorithmus eine wiederholt angewandte Funktion – eine Iteration der Form

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

aus der zugleich das *Prinzip der Rückkopplung*⁵⁴ ersichtlich wird.

Definition

Die erste der drei ein Fraktal definierenden Eigenschaften ist deren *Erzeugbarkeit mittels eines rekursiven Algorithmus*. Die wiederholte Anwendung eines Algorithmus erzeugt zudem eine *kausale Abhängigkeit* der Iterierten voneinander, was als *Prinzip der Rückkopplung* bezeichnet wird. Da eine strikte Trennung der Begriffe rekursiver Algorithmus und Rückkopplung wenig Sinn macht, wird meist von einer *Iteration* gesprochen, da sie zudem die einfachste mathematische Möglichkeit der Realisierung eines rekursiven Algorithmus ist.

⁵³ Vicsek, *Fractal growth phenomena*, 1989, S. 11

⁵⁴ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 23-30

Obwohl Lorenz mit einem iterierten Differentialgleichungssystem ebenso wie auch Julia mit der Iteration einer komplexen Funktion bei ihren Experimenten jeweils einen rekursiven Algorithmus verwendeten, scheinen sich deren Resultate auf den ersten Blick stark zu unterscheiden, da Lorenz als Ergebnis einen seltsamen Attraktor erhielt, Julia dagegen eine fraktale Menge.

Bei genauerer Betrachtung aber wird offenbar, dass seltsame Attraktoren als Bindeglied zwischen der Chaostheorie und den Fraktalen angesehen werden können, da sie die nichtlineare Dynamik eines deterministisch-chaotischen Systems visualisieren und dabei die Ränder des Attraktionsgebietes eine fraktale Menge bilden.

Dem aufmerksamen Leser werden sich an dieser Stelle nach kurzem Nachsinnen sicherlich die Zusammenhänge zwischen der Chaostheorie, der Kausalität, dem Schmetterlingseffekt und den Fraktalen erschließen und er wird das Prinzip der Rückkopplung als das verbindende Element erkennen.

3.3.1.2 Der rekursive Algorithmus zur Erzeugung der Koch-Kurve

Zum besseren Verständnis soll an dieser Stelle exemplarisch die Erzeugung der *Koch-Kurve* beschrieben werden, anhand derer sich die Auswirkungen eines rekursiv angewandten Algorithmus sehr deutlich erkennen lassen.

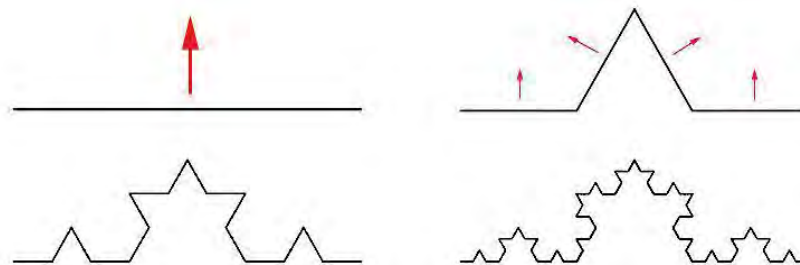


Abb. 11: Die ersten vier Schritte zur Erzeugung der Koch-Kurve

Als Ausgangsobjekt dient eine gerade Linie, der so genannte *Initiator*. Diese Linie wird nun in drei gleich lange Teile geteilt, von denen der mittlere Teil entfernt und durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt wird, von dem zusätzlich die Grundseite entfernt wird. Das entstehende Element, welches nun aus vier gleich langen Strecken besteht, die jeweils ein Drittel der Länge der Ausgangsstrecke haben, bezeichnet man als *Generator*. Jede der vier entstandenen Strecken wird nun durch eine um den Faktor $\frac{1}{3}$ verkleinerte Kopie des Generators ersetzt. Die daraus entstehenden 16 Strecken werden wiederum durch im passenden Verhältnis verkleinerte Kopie des Generators ersetzt. Verfährt man auf diese Weise mit allen entstehenden Strecken, so ergibt sich nach *unendlich* vielen Wiederholungen als *Grenzobjekt* schließlich ein Fraktal: Die *Koch-Kurve*.

3.3.2 Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz

Die zweite essentielle Eigenschaft von Fraktalen, die unmittelbar aus deren Erzeugung mittels eines rekursiven Algorithmus resultiert, ist ihre *Selbstähnlichkeit* oder *Skaleninvarianz*.

3.3.2.1 Erklärung und Definition

Bevor genauer auf diese Eigenschaft von Fraktalen eingegangen wird, muss zuerst darauf hingewiesen werden, dass die Begriffe Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz in den meisten Fällen legitimerweise synonym verwendet werden. Einige Spezialfälle allerdings erfordern eine exakte Differenzierung zwischen den beiden Begriffen, weshalb an dieser Stelle kurz auf den Unterschied eingegangen werden soll.

Der Begriff der *Selbstähnlichkeit* leitet sich vom mathematischen Begriff der Ähnlichkeit ab, der zum Beispiel in der Geometrie bei Ähnlichkeitstransformationen eine große Rolle spielt. Wird ein Fraktal auf mathematische Art und Weise (z.B. durch Iteration) erzeugt, so weist es *exakte Selbstähnlichkeit* auf, was bedeutet, dass selbst bei unendlich starker Vergrößerung um einen konstanten Vergrößerungsfaktor stets ein dem Ausgangsobjekt ähnliches Objekt zum Vorschein kommt. Diese Form der Selbstähnlichkeit bezeichnet man aufgrund der Unabhängigkeit (*Invarianz*) gegenüber Maßstabsveränderungen (*Skalierung*) als *Skaleninvarianz*.

Im Gegensatz dazu wird bei natürlichen Fraktalen der Begriff *Selbstähnlichkeit* mehr qualitativ gebraucht, um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass ein natürliches Fraktal bis zu einer bestimmten Vergrößerung dem Gesamtobjekt ähnlich (nicht im mathematischen Sinne!) erscheint. Damit sind natürliche Fraktale zwar selbstähnlich, nicht aber skaleninvariant, da sie bei beliebig starker Vergrößerung ihre Selbstähnlichkeit verlieren (spätestens auf atomarer Ebene!).

Definition

Als *Selbstähnlichkeit* bezeichnet man die Eigenschaft natürlicher wie artifizierlicher Gegenstände, Körper oder Mengen, bei Veränderung des Betrachtungsmaßstabes um einen konstanten Faktor, dem Ausgangsobjekt ähnliche Strukturen zu zeigen.^{55,56} Ein Spezialfall der Selbstähnlichkeit ist die *Skaleninvarianz*, die allerdings nur bei mathematisch erzeugten Objekten auftritt. Damit ist *Selbstähnlichkeit* eine notwendige Voraussetzung für *Skaleninvarianz*,

⁵⁵ Lüdi/Lüscher, *Was sind selbstähnliche Strukturen?*, 2007

⁵⁶ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Selbstähnlichkeit*

wohingegen *Skaleninvarianz* keine notwendige Folge der *Selbstähnlichkeit* ist.⁵⁷

3.3.2.2 Skaleninvarianz am Beispiel des Sierpiński-Dreiecks

Als Beispiel für ein skaleninvariantes Fraktal soll an dieser Stelle das *Sierpiński-Dreieck* besprochen werden. Wie bereits erwähnt ist Skaleninvarianz eine notwendige Folge aus der Erzeugung eines Fraktals mittels eines rekursiven Algorithmus, auf den in diesem Beispiel aber nicht näher eingegangen werden soll. Weit interessanter ist die Beobachtung, dass das Sierpiński-Dreieck aus drei (das mittlere Dreieck bleibt unberücksichtigt) in der Breite wie auch der Höhe jeweils um den Faktor $\frac{1}{2}$ verkleinerter Kopien des Ausgangsdreiecks besteht. Diese setzen sich ihrerseits wiederum aus drei in Breite und Höhe jeweils um den Faktor $\frac{1}{4}$ gegenüber dem Ausgangsdreieck verkleinerten Kopien zusammen. Würde man das Ausgangsdreieck also in Breite und Höhe jeweils um den Faktor 2 vergrößern, so würde selbst bei unendlich starker Vergrößerung stets das Ausgangsobjekt selbst zum Vorschein kommen.⁵⁸

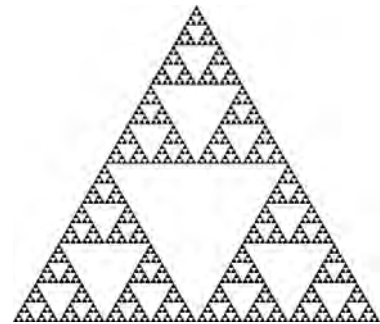


Abb. 12: Das Sierpiński-Dreieck

3.3.3 Fraktale Dimension

Die dritte und wahrscheinlich auch am schwersten verständliche Eigenschaft der Fraktale ist ihre *gebrochene* oder *fraktale Dimension*, welche sie signifikant von den uns gewohnten geometrischen Objekten abhebt und sie gewissermaßen „zwischen den Dimensionen“ ansiedelt.

3.3.3.1 Erklärung und Definition

Mit dem Bekanntwerden der raumfüllenden Kurven von Hilbert und Peano entstand ein in der Mathematik bisher unbekanntes Problem: Füllt eine eindimensionale Kurve (Linie) ein Einheitsquadrat – indem sie jeden Punkt desselben durchläuft – vollständig aus, so impliziert dies, dass die Kurve und das Quadrat in ihrer Dimension übereinstimmten, was allerdings der normalen Alltagserfahrung zuwider läuft und einen offensichtlichen Widerspruch darstellt. Diese Situation erforderte es, die bisherige Definition der Dimension zu überdenken und einen neuen Dimensionsbegriff einzuführen, mit dem sowohl alle bisher bekannten geometrischen Objekte richtig beschrieben werden konnten, als auch den neu entdeckten raumfüllenden Kurven eine Dimension zugeordnet werden

⁵⁷ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 161-174

⁵⁸ Hierbei sei auf das auf der CD enthaltene Java-Applet zum Sierpiński-Dreieck verwiesen

konnte. Eine Lösung für dieses Problem fanden *Felix Hausdorff* und *A. S. Besicovitch* in der nach ihnen benannten *Hausdorff-Besicovitch-Dimension*, die Mandelbrot auch zur Definition der Fraktale verwendet.

Definition

„Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren *Hausdorff-Besicovitch-Dimension* echt die topologische Dimension übersteigt.“⁵⁹

Um diese Definition verstehen zu können, wäre es an dieser Stelle eigentlich notwendig, die Hausdorff-Besicovitch-Dimension über das Hausdorff-Maß⁶⁰ exakt zu definieren. Da dies jedoch sowohl das Niveau als auch den Rahmen dieser Facharbeit um Größenordnungen überstiege, soll darauf verzichtet werden und anstelle dessen auf eine vereinfachte – auch in der Fachliteratur fast ausschließlich angewandte – Möglichkeit der Dimensionsbestimmung zurückgegriffen werden, welche sich von der Hausdorff-Besicovitch-Dimension ableitet.

Definition

Zur Dimensionsbestimmung von „Punktmengen endlicher Ausdehnung in einem zweidimensionalen Raum“⁶¹ (Fraktale) mittels der vereinfachten *Hausdorff-Besicovitch-Dimension* berechnet man die vom Radius R abhängige Anzahl $N(R)$ an Kreisen, die mindestens benötigt wird, um die Punktmenge vollständig zu überdecken. Da die Anzahl $N(R)$ der Kreise gemäß

$$N(R) \sim \frac{1}{R^D}$$

vom Radius R der Kreise abhängt ergibt sich durch Grenzwertbildung $\lim_{R \rightarrow 0}$:

$$D = - \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{\log(N)}{\log(R)}$$

Analog dazu verfährt man bei der Dimensionsbestimmung von Punktmengen in einem dreidimensionalen Raum, indem man statt Kreisen Kugeln annimmt.^{62, 63}

⁵⁹ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 27

⁶⁰ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Hausdorff-Dimension*

⁶¹ Ebd.

⁶² Weisstein, *Capacity Dimension*, 2010

⁶³ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 377

Bestimmt man nun gemäß dieser Definition beispielsweise die Dimension eines Quadrates, so wird man feststellen, dass die Anzahl der Kreise, die zur Überdeckung des kompletten Quadrates bei kleiner werdendem Radius der Kreise nötig sind, mit dem Faktor

$$\frac{1}{R^2}$$

anwächst. Damit ergibt sich für die Dimension eines Quadrates der Wert 2. Diese Definition erlaubt es nun, die Dimension beliebiger Fraktale zu bestimmen. Zur einfacheren Handhabung allerdings unterteilt man die Fraktale in *skaleninvariante* und *selbstähnliche Fraktale*.

3.3.3.2 Die Selbstähnlichkeitsdimension

Um die Dimension *skaleninvarianter Fraktale* zu bestimmen, kann die obige Definition in modifizierter Form angewandt werden, wodurch man zur *Selbstähnlichkeitsdimension* D_s gelangt.⁶⁴

Definition

Bei der Dimensionsbestimmung *skaleninvarianter Fraktale* mittels der *Selbstähnlichkeitsdimension* D_s macht man sich deren Eigenschaft zunutze, dass sie nach einem Iterationsschritt aus N disjunkten, stets im gleichen Skalierungsverhältnis ε verkleinerten Kopien des Ausgangsobjektes selbst bestehen.^{65, 66} Hierbei ist keine Grenzwertbildung erforderlich und es ergibt sich

$$D_s = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = -\frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)}$$

Bestimmt man auch mit dieser Methode die Dimension eines Quadrates, das sich nach einem Iterationsschritt aus $N=9$ kleineren Quadraten, deren Seitenlänge jeweils nur noch $\frac{1}{3}$ der Seitenlänge des ursprünglichen Quadrates beträgt ($\varepsilon = \frac{1}{3}$), so ergibt sich für die Selbstähnlichkeitsdimension gemäß

$$D_s = -\frac{\log(N)}{\log(\varepsilon)} = -\frac{\log(9)}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = 2$$

⁶⁴ Gemäß den vorherigen Ausführungen wäre der Begriff der „Skaleninvarianzdimension“ logischer

⁶⁵ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 245-250

⁶⁶ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 49

der Wert 2. Analog dazu lässt sich die Dimension des Sierpiński-Dreiecks bestimmen. Hierbei besteht die Figur nach einem Iterationsschritt aus $N=3$ gegenüber dem Ausgangsdreieck um den Faktor $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (die Seitenlänge wird halbiert) verkleinerten, ähnlichen Dreiecken. Durch Einsetzen in die obige Gleichung ergibt sich für die Dimension der gerundete Wert 1,58.

3.3.3.3 Die Boxcounting-Dimension

Eine numerische Möglichkeit der Dimensionsbestimmung, die vor allem bei unregelmäßigen, *selbstähnlichen* aber nicht skaleninvarianten Fraktalen sowie bei *natürlichen* Fraktalen zum Einsatz kommt, ist die so genannte Dimensionsbestimmung via *boxcounting*.

Definition

Die *Boxcounting-Dimension* D_B von „Punktmengen endlicher Ausdehnung in einem zweidimensionalen Raum“⁶⁷ (Fraktal) ermittelt man, indem die Punktmenge mit einem regelmäßigen quadratischen Gitter der Gitterbreite ε überdeckt wird, und anschließend die von dieser Gitterbreite abhängige Anzahl $N(\varepsilon)$ der Kästchen (Boxen) bestimmt wird, die einen Punkt der Punktmenge enthalten. Wie auch bei der vereinfachten Definition der Hausdorff-Besicovitch-Dimension nimmt die Anzahl an Punkte beinhaltenden Boxen mit kleiner werdender Gitterbreite zu. Im Grenzfalle $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ ergibt sich für die *Boxcounting-Dimension*^{68, 69}

$$D_B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log(N(\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

Im Grenzfalle entspricht die *Boxcounting-Dimension* der Hausdorff-Besicovitch-Dimension. Ähnlich wie diese kann auch sie zur Dimensionsbestimmung von Punktmengen endlicher Ausdehnung in einem dreidimensionalen Raum angewandt werden, indem anstatt eines Gitters aus regelmäßigen Quadraten ein Gitter aus Kuben verwendet wird.

⁶⁷ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Hausdorff-Dimension*

⁶⁸ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 256-265

⁶⁹ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 370f

Anwendung findet diese Methode beispielsweise bei der Dimensionsbestimmung von Küstenlinien. Vergleicht man dazu die Dimension der britischen Küste ($D=1,25$)⁷⁰ mit der Dimension der südafrikanischen Küste ($D\approx 1$)⁷¹, so erkennt man, dass die Küste Großbritanniens aufgrund ihrer größeren Dimension bei Weitem zerklüfteter, unregelmäßiger und verwinkelter ist als die Küste Südafrikas, die annähernd einer Linie gleicht, und damit nur wenig fraktal erscheint.

4. Fraktale Formen in der Natur

Nachdem nun die theoretischen Grundlagen der Chaostheorie wie auch der Fraktale in der notwendigen Genauigkeit erläutert und durch Beispiele untermauert worden sind, wollen wir nun die gewonnenen Erkenntnisse in der Praxis anwenden und nach natürlichen Fraktalen Ausschau halten, diese beschreiben, klassifizieren und deren Wesen zu verstehen versuchen.

Anders als zahlreiche Bücher zum Thema *Fraktale in der Natur* soll dieses Kapitel zwar den Blick für das Erkennen fraktaler Strukturen in der Natur schulen, indem zahlreiche Beispiele angesprochen werden, dabei aber keineswegs in einer reinen Aufzählung münden, die ob ihres Umfangs zwar beeindruckend wäre, leider aber wenige Erkenntnisse mit sich brächte.

Aus diesem Grunde möchte ich – abweichend von „gewöhnlichen“ Facharbeiten aus der Physik – auf eine übermäßige Verwendung von Formeln verzichten, und stattdessen bewusst philosophische Sichtweisen auf das Wesen der Natur mit dem nüchternen physikalischen Weltverständnis in Verbindung bringen, um so zu versuchen, die durch eine zu starke Fokussierung auf mathematische Beweisführungen und Berechnungen bedingte, oft sehr eingeschränkte Wahrnehmung der Natur zu erweitern.

4.1 Physik und Philosophie

Ähnlich wie sich Faust in Goethes gleichnamigem Werk nach der verzweifelten Suche dessen, „*was die Welt im Innersten zusammenhält*“⁷², letztlich dem Magischen und Teuflischen zuwendet, wollen wir uns der Philosophie zuwenden, um im wahrsten Sinne des Wortes eben dieses, „*was die Welt im Innersten zusammenhält*“ zu finden.

⁷⁰ Froehner, *Die Dimension zweieinhalb – zum Raumbegriff aus dem Blickwinkel des Mathematikers*

⁷¹ Ebd.

⁷² Goethe, *Faust – Der Tragödie erster Teil*, 2000, S. 13

Seit jeher versuchen Physiker wie auch Philosophen mit den Mitteln ihrer jeweiligen Fachrichtung unabhängig voneinander die Welt zu verstehen und ihr Wesen zu ergründen, um so in letzter Konsequenz den Sinn des Seins zu erklären – und scheitern bis zum heutigen Tag ein ums andere Mal.

Erst mit Werner Heisenberg erklimmte Mitte des 20. Jahrhunderts ein Physiker die Weltbühne, der es verstand, durch philosophische Reflexion⁷³ seine scheinbar für die Ewigkeit gültigen Erkenntnisse zu gewinnen, welche die Welt im Innersten beschreiben und von ähnlich elementarer Natur sind, wie Einsteins Entdeckung der Relativität von Raum und Zeit und den daraus resultierenden Folgen.

Ganz im Sinne Heisenbergs möchte ich daher versuchen, wieder eine Brücke zwischen der Physik und der Philosophie zu schlagen und somit ehemaligen großen Naturphilosophen nachzueifern, die es verstanden, durch physikalisches Beobachten der Natur und anschließendes philosophisches Reflektieren des Beobachteten letztendlich zu einem weit gefestigteren und elementarerem Verständnis des Wesens der Natur zu gelangen, als es durch isoliertes physikalisches Beobachten oder philosophisches Reflektieren je möglich wäre.

Deshalb ist es gleichzeitig Motivation und Intention dieses Kapitels, anhand einiger für jedermann nachvollziehbarer und mit eigenen Augen beobachtbarer Beispiele für Fraktale oder fraktal-ähnliche Objekte oder Phänomene aus der Natur zu erforschen, ob die Fraktalität, welche die Natur an unzähligen Stellen an den Tag legt, nur einen evolutionären Zwischenschritt in der Entwicklung der Natur markiert oder von grundlegenderer Bedeutung ist und – ähnlich der Heisenberg'schen Unschärferelation – ein der Natur immanentes, weder hinterfragbares noch erklärbares Prinzip darstellt.

4.2 Die Fibonacci-Folge und der Goldene Schnitt

In Anlehnung an die Struktur des dritten Kapitels soll anfangs ein in der Natur vorkommender rekursiver Algorithmus im Zentrum unserer Betrachtung stehen: Die *Fibonacci-Folge*, sowie der aus ihr abgeleitete *Goldene Schnitt* und der *Goldene Winkel*.

Definition

Unter der *Fibonacci-Folge* versteht man eine unendliche Folge von Zahlen (den Fibonacci-Zahlen), bei der sich die jeweils folgende Zahl durch Addition der

⁷³ Bei weiterführendem Interesse sei an dieser Stelle zum einen auf Werner Heisenbergs Buch „*Physik und Philosophie*“ hingewiesen, sowie zum anderen auf die auf der beiliegenden CD enthaltenen Videobeiträge des Vortrages „München leuchtet für die Wissenschaft“, in denen Einblicke in Heisenbergs Lebens- und Denkweise gewährt werden und sein Leben als Physiker und Philosoph beschrieben wird

beiden vorherigen Zahlen ergibt. Ausgangspunkt für diese Folge sind die Fibonacci-Zahlen

$$f_0 = 0 \quad \text{und} \quad f_1 = 1$$

aus denen durch Anwenden des *rekursiven Algorithmus (Bildungsgesetz)*

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2 \quad (1)$$

die *Fibonacci-Folge* 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ... hervorgeht.⁷⁴

Interessant dabei ist, dass diese unendliche Zahlenfolge wiederum einen Zusammenhang mit dem berühmten *Goldenen Schnitt* zeigt, welcher sich folgendermaßen ausdrückt:

Definition

Teilt man eine Fibonacci-Zahl f_n durch ihren unmittelbaren Vorgänger f_{n-1} , so wird der *Goldene Schnitt* Φ umso besser approximiert, je größer die Fibonacci-Zahlen sind. Aus dem rekursiven Bildungsgesetz (1) der Fibonacci-Zahlen folgt nach einer kleinen mathematischen Umformung unmittelbar

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \quad (2)$$

Durch Grenzwertbildung $\lim_{n \rightarrow \infty}$ konvergiert die Beziehung (2) gegen den *Goldenen Schnitt* Φ

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$$

Laut Beziehung (2) kann der *Goldene Schnitt* unter Kehrbruchbildung und einigen mathematischen Umformungen auch als

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

dargestellt werden.

⁷⁴ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 36-40

Setzt man diese Beziehung schließlich in sich selbst ein, so erhält man einen Kettenbruch der Form

$$\Phi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

Zusätzlich kann auch der sogenannte *Goldene Winkel* φ ⁷⁵ berechnet werden, der mit seinem Komplement ω den Vollkreis bildet, und mit diesem im Verhältnis des goldenen Schnitts steht:

$$\Phi = \frac{\omega}{\varphi} = \frac{360^\circ - \varphi}{\varphi}$$

Durch Kürzen und mathematische Umformung ergibt sich schließlich

$$\varphi = \frac{360^\circ}{1 + \Phi} = \frac{360^\circ}{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 137,5^\circ$$

Obgleich die *Fibonacci-Folge*, der *Goldene Schnitt* sowie der *Goldene Winkel* keine Fraktale im klassischen Sinne darstellen, so kann dennoch vor allem die *Fibonacci-Folge* durchaus als selbstähnlich bezeichnet werden.

Weit interessanter als die Theorie aber ist das äußerst vielfältige Vorkommen der Fibonacci-Folge sowie des goldenen Schnittes in der Natur. So teilt beispielsweise der Bauchnabel eines erwachsenen Menschen diesen im Verhältnis des Goldenen Schnittes (Körpergröße/Länge vom Bauchnabel zu den Füßen)⁷⁶, was sich vor allem in der Kunst niederschlug. Des Weiteren ist der Goldene Schnitt – und damit die Fibonacci-Folge – bei der Blattanordnung verschiedener Kohlarten, bei der Schuppenkonfiguration von Fichtenzapfen, in der Rinde verschiedener Palmen- und Yucca-Arten, sowie in der Anordnung der Blütenblätter von Rosen oder Gänseblümchen anzutreffen.^{77, 78} Auch lässt sich mithilfe der Fibonacci-Folge – wie Leonardo Fibonacci seinerzeit selbst illustrierte – vereinfacht die zeitliche Entwicklung einer Kaninchenpopulation berechnen.⁷⁹ Das in

⁷⁵ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Goldener Winkel*

⁷⁶ Hollenberg-Gymnasium, *Fibonacci-Folge*

⁷⁷ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Goldener Schnitt in der Biologie*

⁷⁸ Oeschger/Mettler/Sägesser, *Fibonacci*, 2008

⁷⁹ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 38f

diesem Zusammenhang wohl bekannteste und daher auch am besten beschriebene Objekt aber ist die Sonnenblume. Wie keine andere Pflanzen zeichnet sie sich durch eine besondere Stellung der Samen aus: Dabei schließen benachbarte Samen einen irrationalen Winkel ein, der dem goldenen Winkel von $137,5^\circ$ entspricht. Dieser spezielle Winkel ist bedingt durch das Wachstum des Blütenstandes, bei dem neue Samen stets den größtmöglichen Abstand zu den bereits existierenden Samen suchen.^{80, 81} Als Resultat dieses Wachstums entstehen im Blütenstand der Sonnenblume *rechts- und linksdrehende Fibonacci-Spiralen* aus Samenkernen. Dabei beobachtet man meist 55 rechtsdrehende, und 34 linksdrehende Spiralen. Abweichungen von diesem Standardverhältnis treten beispielsweise bei Riesensonnenblumen (Spiralverhältnis 233 : 144) oder bei sehr kleinen Sonnenblumen (Spiralverhältnis 34 : 21) auf.⁸² Fibonacci-Spiralen lassen sich zudem beispielsweise bei der Ananas, bei verschiedensten Zapfen von Nadelbäumen wie auch bei Romanesco beobachten.⁸³ Auch in der Anordnung der Blütenblätter vieler Pflanzen lässt sich das oben beschriebene Prinzip beobachten, sodass aufeinanderfolgende Blütenblätter den goldenen Winkel von $137,5^\circ$ einschließen, und so eine optimale Lichtausbeute erzielen, da weder Lücken zwischen den Blättern auftreten, noch Blätter sich komplett überdecken.

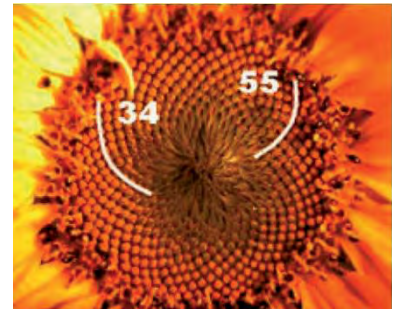


Abb. 13: Links- und rechtsdrehende Fibonacci-Spiralen im Blütenstand von Sonnenblumen

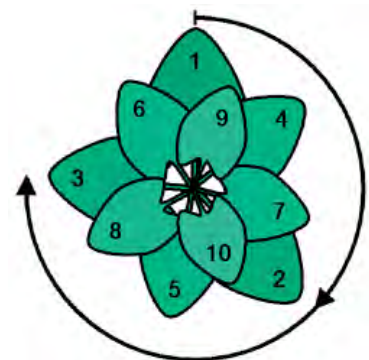


Abb. 14: Die Blütenblätter Nr. 1 und Nr. 2 schließen den goldenen Winkel ein

Eine besonders beeindruckende, nicht-biologische Anwendung des Goldenen Schnittes beobachtet man zudem in der Himmelsmechanik: Im Jahr 1964 entdeckten die Mathematiker A. Kolmogorow, V. I. Arnold und J. Moser, dass die Bahnen von Himmelskörpern langfristig gegenüber kleinen Störungen stabilisiert werden, wenn die Umlaufzeiten ein genügend irrationales Verhältnis wie beispielsweise $1 : \Phi$ bilden (*KAM-Theorem*).⁸⁴

⁸⁰ An dieser Stelle sei auf Uwe Alfes auf der beiliegenden CD enthaltene *Simulation der Entstehung des Goldenen Winkels in Blüten- und Blattstellungen* verwiesen, die den Sachverhalt visuell besser zu erklären vermag, als es durch Worte möglich wäre

⁸¹ Alfes, *Simulation der Entstehung des Goldenen Winkels in Blüten- und Blattstellungen*

⁸² Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Goldener Schnitt in der Biologie*

⁸³ Oeschger/Mettler/Sägesser, *Fibonacci*, 2008

⁸⁴ Wikipedia – Die freie Enzyklopädie, *Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorem*

Auch bei der sogenannten *Penrose-Parkettierung*⁸⁵, mit der eine Ebene durch aperiodische Kachelmuster vollständig parkettiert werden kann, tritt der Goldene Schnitt in Erscheinung. Eine natürliche Anwendung dieses Prinzips findet sich wiederum bei der Struktur von Quasikristallen in der Festkörperphysik.

Diese kleine Sammlung ausgewählter Beispiele aus verschiedensten Bereichen der belebten und unbelebten Natur lässt die Frage aufkommen, ob das Auftreten des Goldenen Schnittes lediglich reiner Zufall oder Ausdruck eines bisher nicht näher erforschten Prinzips der Natur ist. Besonders das *KAM-Theorem* und die bei Quasikristallen auftretende *Penrose-Parkettierung* als Beispiele aus der unbelebten Natur lassen die schleichende Vermutung aufkommen, dass es sich dabei nicht um reinen Zufall handelt, sondern um eine *Art mathematisches Prinzip innerhalb der Natur*.

4.3 Fraktales Wachstum

Nachdem mit der Fibonacci-Folge und dem Goldenen Schnitt lediglich zwei *fraktal-ähnliche* Objekte besprochen wurden, soll der Fokus nun voll und ganz auf *echten natürlichen Fraktalen* liegen, die nach ihren Eigenschaften klassifiziert und anschließend beschrieben werden sollen.

4.3.1 Von Pythagoreischen Bäumen und Barnsleys Farnen

Wie schon die Fibonacci-Folge, werden auch *Pythagoreische Bäume* ebenso wie *Barnsley-Farne* von einem rekursiv arbeitenden Algorithmus erzeugt, allein mit dem Unterschied, dass zur Erzeugung des Pythagoras-Baumes *reine Ähnlichkeitsabbildungen* notwendig sind, für den Barnsley-Farn hingegen so genannte *affine Abbildungen*, die auch Verschiebungen, Drehungen, Skalierungen (unabhängig voneinander in x- wie auch in y-Richtung), Spiegelungen sowie Scherungen erlauben und damit als Verallgemeinerung der reinen Ähnlichkeitsabbildungen angesehen werden können, benötigt werden. Die Gesamtheit der für die Erzeugung eines Fraktals angewandten affinen Abbildungen nennt man auch *Iteriertes Funktionensystem*, kurz *IFS*.

4.3.1.1 Der Pythagoras-Baum

Der geometrisch-biologische Begriff des *Pythagoras-Baumes* geht – wie unschwer zu erraten ist – auf den berühmten Griechen Pythagoras und dessen weltberühmten Satz der euklidischen Geometrie zurück.

⁸⁵ Hartfeld/Henning, *Muster, Flächen, Parkettierungen – Anregungen für einen kreativen Mathematikunterricht*, 2002, S. 25-41

Erzeugung:

Der *Pythagoras-Baum* bedient sich als Ausgangsobjekt eines Quadrates, auf dessen Oberseite ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei bestimmten Basiswinkeln aufgesetzt wird (Abb. 15a). Über den Katheten dieses Dreieck werden wiederum Quadrate errichtet (Abb. 15b), auf deren den Katheten gegenüberliegenden Seiten schließlich wiederum jeweils Dreiecke aufgesetzt werden (Abb. 15c), die eine verkleinerte Kopie des ersten Dreiecks darstellen. Führt man diese Schritte unendlich oft durch (Abb. 15d und 15e), so ergibt sich als Grenzobjekt ein spezieller, von den Basiswinkeln der aufgesetzten Dreiecke abhängiger *Pythagoras-Baum* (Abb. 15f).^{86, 87, 88}

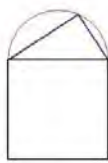


Abb. 15a: Auf der Oberseite des Quadrates wird ein rechtwinkliges Dreieck aufgesetzt

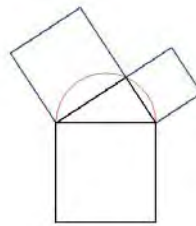


Abb. 15b: Über den beiden Katheten werden jeweils Quadrate errichtet

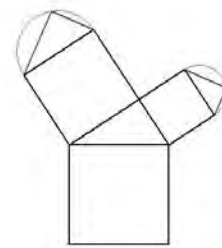


Abb. 15c: Der Pythagoras-Baum nach einer vollständigen Iteration

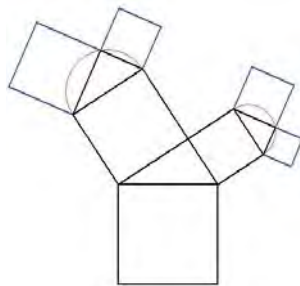


Abb. 15d: Über den entstandenen Katheten werden wiederum Quadrate errichtet

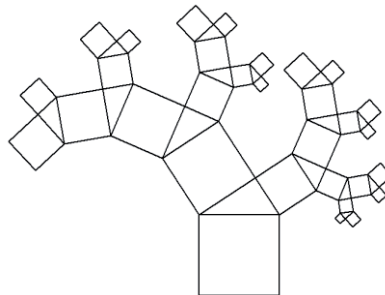


Abb. 15e: Der Pythagoras-Baum während der vierten Iteration

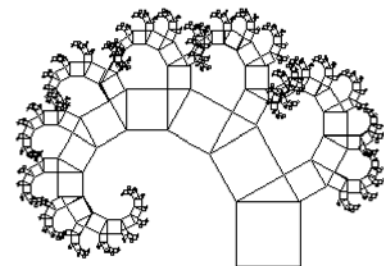


Abb. 15f: Der Pythagoras-Baum nach unendlich vielen Iterationen

Indem gezielt bestimmte Parameter wie zum Beispiel die beiden Basiswinkel verändert oder anstatt Quadraten Rechtecke verwendet werden, ergeben sich verschiedenste

⁸⁶ Brefeld, *Der Pythagoras-Baum und seine Blätter*, 2005-2010

⁸⁷ Peitgen, *Bausteine des Chaos - Fraktale*, 1992, S. 150-156

⁸⁸ Hierbei sei auf das auf der CD enthaltene Java-Applet zur Erzeugung des Pythagoras-Baumes verwiesen

Pythagoreische Bäume. Bezieht man zusätzlich das Zufallselement mit ein, indem vor jedem Konstruktionsschritt die Basiswinkel der aufgesetzten Dreiecke zufällig bestimmt werden, so ergeben sich sehr real aussehende Pythagoreische Bäume, die von natürlichen Bäumen oft kaum unterscheidbar sind.



Abb. 16: Ein zufällig erzeugter Pythagoras-Baum

4.3.1.2 Der Barnsley-Farn

Neben den Pythagoreischen Bäumen, die aufgrund der relativ strengen Erzeugungsvorschriften nur im bestimmten Fällen natürlichen Bäumen ähneln, sind die *Barnsley-Farne* in nahezu allen Fällen von natürlichen Farnen kaum zu unterscheiden, da für ihre Erzeugung mit den *affinen Abbildungen* Verschieben, Drehen, Verkleinern und Spiegeln weit mehr Möglichkeiten zur Verfügung stehen, als durch simple Ähnlichkeitsabbildung wie beim klassischen Pythagoras-Baum. Da für das Verständnis der Erzeugungsvorschrift für Barnsley-Farne umfangreiche Kenntnisse zu Lindenmayer-Systemen⁸⁹ notwendig wären, die den Rahmen dieser Facharbeit sprengen würden, soll daher weniger auf die Erzeugung⁹⁰, sondern vielmehr auf die *Eigenschaften der Barnsley-Farne* eingegangen werden.

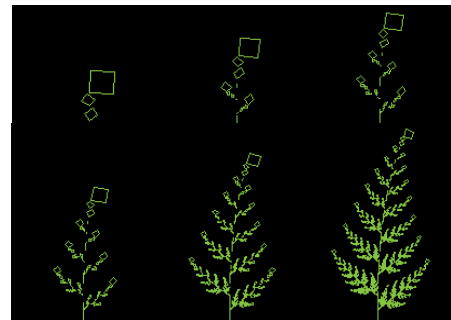


Abb. 17: Einige exemplarische Stadien während der Erzeugung eines Barnsley-Farns

Trotz der offensichtlichen Simplizität der Pythagoreischen Bäume wie auch der Barnsley-Farne hinsichtlich ihrer Erzeugung, zeigen sie doch jenen hohen Grad an Komplexität und Individualität, der auch in der Natur anzutreffen ist. Gelingt es, mit mathematischen Mitteln ein Objekt wie den Barnsley-Farn zu erzeugen, der in seiner Form und Struktur einem natürlichen Farn nahezu gleicht, so ist dies ein starkes Indiz dafür, dass auch die Natur Farne prinzipiell auf eben diese – oder eine sehr ähnliche – Weise durch das rekursive Anwenden eines bestimmten Algorithmus erzeugt. Natürlich ist dieser Schluss mit Vorsicht zu genießen, da er weder verifiziert noch falsifiziert werden kann. Dennoch ist es legitim anzunehmen, in der *fraktalen Geometrie* jene Theorie gefunden zu haben, die es uns erlaubt, das Beobachtete möglichst genau und wahrheitsgetreu zu beschreiben,

⁸⁹ Bei besonderem Interesse sei an dieser Stelle auf die in der Bibliothek befindliche Facharbeit „Einführung in die Welt der Fraktale“ von Fabian Petter hingewiesen, in der unter Punkt 2 „Darstellung von Fraktalen“ näher auf Lindenmayer-Systeme eingegangen wird

⁹⁰ Hierbei sei auf das auf der CD enthaltene Java-Applet zur Erzeugung von Barnsley-Farnen verwiesen

wohlwissend, dass diese Beschreibung – wie alle naturwissenschaftlichen Modellvorstellungen und Theorien – mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht der Wirklichkeit entsprechen wird.

Interessanter als die bloße Feststellung, dass viele natürliche Objekte mithilfe der fraktalen Geometrie sehr gut beschrieben werden können, ist allerdings die *Frage nach dem Grund dessen*. Es stellt sich die Frage, ob die an vielen Stellen in der Natur zu beobachtende Selbstähnlichkeit evolutionärer Zufall und damit nur Zwischenstufe einer längerfristigen Entwicklung ist, oder aber ein elementarer Wesenszug der Natur ist, indem durch wiederholte Anwendung eigentlich sehr simpler Operationen dennoch hochkomplexe Formen und Strukturen erzeugt werden. Daran schließt sich die Frage an, welche Vorteile dies gegenüber anderen potentiellen Möglichkeiten bietet, und woraus dieses Vorgehen der Natur resultiert, sowie die Frage, ob das *Wesen der Natur tatsächlich ein Mathematisches* ist, oder ob wir einem folgenschweren Irrtum unterliegen, wenn wir die *Mathematik als Sprache* der Natur bezeichnen.

4.3.2 Fraktale zur Oberflächenvergrößerung

Doch nicht nur die Pflanzenwelt weist beeindruckende fraktale Eigenschaften auf – auch Säugetiere wie der Mensch zeigen auf faszinierende Art und Weise die scheinbar unumgängliche Wichtigkeit fraktaler Formen für die Erhaltung des Lebens. Zwei wohlbekannte aber doch eindrucksvolle Beispiele hierfür sind die *Blutgefäßsysteme von Lunge und Niere*: Um eine möglichst große Oberfläche zum Austausch von Sauerstoff und Kohlenstoffdioxid beziehungsweise Abfallstoffen des Körpers zu schaffen, bedient sich die Natur der Oberflächenvergrößerung durch *fraktale Verästelung*. Indem sich die Blutgefäße stets zu immer feiner werdenden Strukturen verzweigen, nimmt die dadurch gewonnene Oberfläche in dem Maße zu, in dem sich die Gefäße verkleinern. Je kapillarartiger die Blutgefäße werden, desto enger können sie gepackt werden, und desto größer wird die Gesamtoberfläche, was wiederum den Stoffaustausch erleichtert und zu höheren Umsatzraten führt. Diese selbstähnlichen Eigenschaften der Lunge und der Nieren weisen darauf hin, dass es sich dabei nicht um klassisch euklidische Objekte handeln kann, sondern um Fraktale, die nur durch eine gebrochene Dimension hinreichend genau



Abb. 18: Das Blutgefäßsystem der Niere zeigt fraktale Verästelung

beschrieben werden können. Mandelbrot nennt in diesem Zusammenhang für die Dimension von Bronchialbäumen den Wert 2,90.⁹¹

4.3.3 Fraktales Wachstum nichtbelebter Materie

Neben Fraktalen in der belebten Natur finden sich auch in der unbelebten Natur unzählige Beispiele für fraktale Vorgänge und Formen, die uns zwar tagtäglich begegnen und daher vertraut erscheinen, sich bei genauerem Betrachten und Reflektieren aber als faszinierend und zugleich höchstinteressant erweisen. Dabei sind einige bereits erklärt und verstanden, andere hingegen entziehen sich noch gänzlich unserem Verständnis. Ein erstes Beispiel für ein bereits erklärtes aber dennoch nicht minder interessantes Fraktal sind *Blitze*, mit ihrem zackigen und unregelmäßigen Erscheinungsbild. Als Antwort auf die Frage, warum Blitze ebendiese fraktale Form ausbilden, die wir beobachten, wird zumeist angeführt, dass damit dem Streben des elektrischen Stromes, stets den Weg des geringsten Widerstandes zu beschreiten, Rechnung getragen wird. Aufgrund minimaler Leitfähigkeitsschwankungen in der Atmosphäre ist daher in nahezu allen Fällen eine von der direkten Verbindungslinie Wolke-Erdboden abweichende Blitzlinie günstiger – weil widerstandsärmer und damit Grund für das fraktale Erscheinungsbild eines Blitzes.



Abb. 19: Auch Blitze erlangen durch ihre unregelmäßigen und zackigen Verzweigungen fraktalen Charakter

Ein Beispiel für ein bisher nicht befriedigend erklärtes fraktales Phänomen ist die Ausbildung *dendritischer Strukturen*⁹² bei der elektrochemischen Abscheidung von Metallen an den Elektroden, was bei Akkumulatoren auch als *Memory-Effekt* bekannt ist. Auch bei der Entstehung von Eisblumen auf Glasoberflächen, der Auskristallisation von Eisen- oder Manganoxiden auf Gesteinsflächen sowie beim Vermischen viskoser Flüssigkeiten⁹³, zeigen sich dendritische Strukturen. Ein letztes besonders schönes Beispiel für eine dendritische Struktur sind so genannte Lichtenberg-Figuren, die infolge elektrischer Hochspannungsentladungen auf oder in Isolatoren wie Glas oder Acryl entstehen.⁹⁴



Abb. 20: Ein bei der elektrolytischen Abscheidung von Kupfer aus einer Kupfersulfatlösung entstandener Dendrit

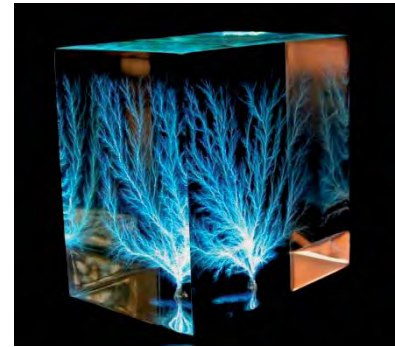
⁹¹ Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, 1991, S. 469

⁹² Als *Dendriten* (gr.: *déndron* = Baum) bezeichnet man baum- oder strauchartige Verzweigungsstrukturen

⁹³ Schlichting, *Fraktales Wachstum am Beispiel der fingerartigen Durchdringung zweier Flüssigkeiten*, 1993

⁹⁴ Hickman, *What are Lichtenberg figures, and how are they made?*, 2010

Obwohl es an dieser Stelle mühelos möglich wäre, unzählige ähnliche Beispiele anzuführen, soll darauf verzichtet werden und anstelle dessen vielmehr die essentielle Bedeutung dieser Beobachtung hervorgehoben werden: Wie schon Mandelbrot feststellte, scheint die Unregelmäßigkeit und Fraktalität keineswegs die Ausnahme, sondern vielmehr die Regel in der Natur zu sein



und erfordert daher ein radikal neues Denken oder zumindest eine dahingehende Schärfung unseres Bewusstseins, dass Linearisierungsvorgänge, Näherungen und zu starke Vereinfachungen zwar die Beschreibung physikalische Phänomene erleichtern, ja teilweise erst ermöglichen, dabei das Wesen der Natur aber oft bis zur Unkenntlichkeit entstellen.

Abb. 21: Eine durch rasche Umverteilung von Ladungen im Acrylglas erzeugte Lichtenberg-Figur

4.4 Selbstorganisation am Beispiel der Bildung von Flussnetzwerken

Wie in der Definition der Chaostheorie bereits angesprochen, stellt auch die *Idee der Selbstorganisation* – obwohl sie eigentlich der Theorie komplexer adaptiver Systeme entlehnt ist – einen nicht zu vernachlässigenden Bestandteil der Chaostheorie dar. Da selbstorganisierte Prozesse in der Natur ebenso zahlreich in Erscheinung treten wie Fraktale, soll an dieser Stelle kurz auf einen derartigen Prozess eingegangen werden, der zudem eine fraktale Struktur erzeugt und somit die *Chaostheorie*, *Fraktale* wie auch die *Idee der Selbstorganisation* in einem Beispiel vereinigt und daher sowohl zum Studium der Selbstähnlichkeit wie auch der fraktalen Dimension geradezu prädestiniert ist.

Dazu betrachten wir das weitläufige Flussnetzwerk des Amazonas und wollen versuchen, die Entstehung und Entwicklung desselben nachzuvollziehen und zu verstehen, und im Anschluss daran anhand eines Gedankenexperimentes eine mathematische Beschreibung zu wagen.⁹⁵ Wie Luftaufnahmen großer Flussnetzwerke eindrucksvoll zeigen, ist eine Ähnlichkeit zwischen natürlichen Fraktalen wie den Nieren oder Blitzen nicht zu verkennen, was uns zu der Vermutung führt, dass es sich auch bei Flussnetzwerken um Fraktale handelt. In unserem Gedankenexperiment betrachten wir als System eine ebene quadratische Fläche, die gleichmäßig mit Wasser benetzt wird und wahlweise an einer Ecke oder in der Mitte einen Abfluss besitzt. Wie uns physikalische Betrachtungen der Natur lehren, versucht das dem System zugeführte Wasser stets zum tiefsten Punkt zu gelangen, um somit einen Zustand größtmöglicher Energiearmut einzunehmen. Gleichzeitig strebt

⁹⁵ Dabei werden aus Gründen der Einfachheit geologische wie auch hydrologische Aspekte vernachlässigt

das gesamte System nach einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand, dem sogenannten *stationären Zustand*, in dem die Menge an Wasser (Energie), die dem System innerhalb eines Zeitintervalls zugeführt wird gleich der Menge an Wasser (Energie) ist, die innerhalb desselben Zeitintervalls das System durch den Abfluss verlässt. Da es sich in unserem Beispiel allerdings nicht um ein geschlossenes, sondern um ein *offenes*, von Wasser (und damit von Energie) durchflossenes System handelt, kann es einen *thermodynamischen Gleichgewichtszustand tatsächlich nicht erreichen*, sondern sich diesem nur *beliebig stark annähern*.⁹⁶

Zu Beginn des Gedankenexperiments liegt ein gleichgewichtsferner Zustand vor, der dadurch in einen dem thermodynamischen Gleichgewicht unter den gegebenen Bedingungen möglichst nahen Zustand überführt wird, indem die zugeführte Energiemenge *dissipiert* („zerstreut“) wird. Dabei wird die dem System in Form „*hochwertiger*“⁹⁷ potentieller Energie zugeführte Energie durch Reibung mit dem Flussbett in eine „*minderwertigere*“⁹⁸ Energieform wie Wärme umgesetzt. Je effektiver dieses „*Zerstreuen*“ der Energie abläuft, desto stärker nähert sich das System dem unter den gegebenen Bedingungen möglichen stationären Zustand an. Dabei nimmt die Dissipationsrate, die als Indikator für die Entfernung des Systems vom stationären Zustand interpretiert werden kann, stetig ab, bis sie schließlich ein Minimum⁹⁹ erreicht.



Abb. 22: Computersimulation der Entstehung eines Flussnetzwerkes

Mathematische Betrachtung

Im *stationären Zustand* würde die gesamte dem System zugeführte potentielle Energie E_{pot} dissipiert werden:

$$E_{diss} \sim E_{pot} \sim m \cdot h$$

Dabei sei m_i die durch das i -te Kanalsegment abfließende Wassermenge, sowie l_i die Länge und s_i die Steigung des entsprechenden Kanalsegments woraus sich

⁹⁶ Gemäß dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik können nur abgeschlossene Systeme tatsächlich einen thermodynamischen Gleichgewichtszustand erreichen.

⁹⁷ eigentlich: *entropiearm*

⁹⁸ eigentlich: *entropiereich*

⁹⁹ Würde ein abgeschlossenes System vorliegen, so würde die Dissipationsrate den Wert 0 annehmen

für die Energiedissipation $E_{diss,i}$ des i -ten Kanalsegments die Formel

$$E_{diss,i} \sim m_i \cdot s_i \cdot l_i$$

ergibt. Als Durchflussmenge Q_i eines Kanalsegments, das heißt die in der Zeit Δt geflossene Wassermenge Δm_i wird zudem definiert als

$$Q_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta t}$$

woraus sich durch die Beziehung

$$P_{diss} = \frac{E_{diss}}{\Delta t}$$

für die Energiedissipationsrate $P_{diss,i}$ in einem Kanalsegment die Formel

$$P_{diss,i} \sim Q_i \cdot s_i \cdot l_i$$

ergibt. Durch den empirisch gefunden Zusammenhang zwischen Durchfluss und Steigung eines Kanalsegmentes

$$s_i \sim Q_i^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \approx -0,5$$

vereinfacht sich die vorhergehende Beziehung zu

$$P_{diss,i} \sim Q_i^\alpha \cdot l_i$$

Durch Aufsummieren der einzelnen Dissipationsterme über alle n Kanalsegmente des Netzwerkes ergibt sich die Gesamtdissipationsrate¹⁰⁰ zu

$$P_{diss} \sim \sum_{i=1}^n P_{diss,i} \sim \sum_{i=1}^n Q_i^{0,5} \cdot l_i$$

¹⁰⁰ Schlichting/Nordmeier, *Thermodynamik und Strukturbildung am Beispiel der Entstehung eines Flussnetzwerkes*, 2000

5. Philosophische Reflexion über das Wesen der Natur

Nachdem nun die Chaostheorie, die Fraktale, wie auch natürliche fraktale Gebilde und Phänomene in einem der Thematik angemessenen Maße besprochen und erklärt wurden, bleibt ein letzter Punkt, durch den das Niedergeschriebene seinen Sinn erst vollkommen zu entfalten vermag, und damit gleichzeitig Quintessenz und Höhepunkt dieser – vielleicht etwas atypischen – Physikfacharbeit sein sollte: *Die philosophische Reflexion über das Wesen der Natur*, das Nachsinnen über unsere Beobachtungen, die Erkenntnis der Lückenhaftigkeit unseres vermeintlichen Wissens sowie das Eingeständnis unserer menschlichen Schwachheit und Beschränktheit.

Obwohl es an dieser Stelle eigentlich notwendig wäre, den Begriff des *Wesens der Natur* exakt zu definieren, soll darauf bewusst verzichtet werden, und anstatt dessen vielmehr auf die Sprache eingegangen werden, in der wir unsere Erkenntnisse über die Natur niederschreiben – die *Sprache der Mathematik*. Egal ob in der Chaostheorie bei der Beschreibung deterministisch-chaotischer Vorgänge, bei der Bestimmung der fraktalen Dimension oder bei der quantitativen Beobachtung natürlicher fraktaler Formen – stets versuchen wir unsere Beobachtungen mathematisch auszudrücken. Dabei allerdings stellen sich nur sehr wenige die Frage, *warum es eigentlich möglich ist, natürliche Formen und Phänomene mathematisch zu beschreiben, und warum sogar Vorhersagen getroffen werden können, die sich später experimentell als im Einklang mit der Natur erweisen*.

Um den Antworten auf diese Fragen näher zu kommen, möchte ich eine kurze – von Platon überlieferte – Anekdote aus dem Leben des Philosophen Thales von Milet zitieren: So soll Thales einst bei der nächtlichen Beobachtung der Sterne des Himmels in einen Brunnen gestürzt sein, wobei ihn eine thrakische Magd beobachtete, und dessen Streben nach dem Überirdischen mit den Worten

*„...was im Himmel wäre, strebte [er] wohl zu erfahren, was aber vor ihm läge und zu seinen Füßen, ihm unbekannt bliebe.“*¹⁰¹

verspottet haben soll. Wie keine andere Geschichte versinnbildlicht diese kurze Episode aus dem Leben des Thales das von Unbedarften meist fehlgedeutete Streben der Philosophen nach dem Erkennen der Quintessenz, des „*Fünften Seiden*“ (*quinta essentia*), dessen, was

¹⁰¹ Schmidt, Alfred, *Sind Philosophen verrückt – oder: Wittgenstein und das Lachen der thrakischen Magd*, 2001

die Natur durchwirkt und ihr Wesen ausmacht. Im Bewusstsein dessen aber erhält Thales' Sturz in den Brunnen eine viel weitreichendere Bedeutung: Um das wahre Wesen der Natur zu erkennen, muss man erst den so sicher geglaubten Boden unter den Füßen verlieren, um schließlich – basierend auf einem tiefer gründenden Fundament – die Natur in einer umfassenderen und vollständigeren Art und Weise verstehen zu können.

Ähnlich hart, wie seinerzeit Thales gelandet sein muss, schlug in neuerer Zeit auch die Physik bereits zweimal auf dem Boden der Realität auf: Das erste Mal bei der Veröffentlichung der speziellen wie auch der allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein Anfang des 20. Jahrhunderts, mit der die bis dahin uneingeschränkt gültige Newton'sche Mechanik samt dem aus ihr abgeleiteten Weltbild infrage gestellt und die Physik – insbesondere bei der Vorstellung von Raum und Zeit – in ihren Grundfesten erschüttert wurde. Hatte sich die Physik gerade erst mit der Vorstellung eines gekrümmten Raumzeit-Kontinuums arrangiert, so erfolgte etwa 20 Jahre später mit wegweisenden Arbeiten von Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Max Born, Nils Bohr, Paul Dirac, Louis de Broglie sowie vielen weiteren bedeutenden Physikern, basierend auf Arbeiten von Max Planck aus dem Jahre 1900, der zweite – und bis dahin wahrscheinlich tiefste – Einschnitt in die Physik: Die Entwicklung der Quantenmechanik. So unbegreiflich die Vorstellungen einer vierdimensionalen, in sich gekrümmten Raumzeit oder eines Objektes, welches gleichzeitig Welle *und* Teilchen ist, damals wie heute auch sind, so sehr beeinflussen sie unser Denken. Der Umstand, dass wir heute dank GPS jederzeit exakt unseren Standort auf der Erde bestimmen und dabei Musik von einer CD hören können, zeugt davon, dass wir die Natur im Großen wie auch im Kleinen – wenn auch nur in Ausschnitten – in sehr wohl verstanden haben, und mit mathematischen Mitteln beschreiben können.

Trotz dieser fundamentalen neuen Erkenntnisse, die eine Revolution im physikalischen Denken zur Folge hatten, bleiben dennoch viele Fragen unbeantwortet. So ist es beispielsweise höchst unbefriedigend, dass Teilchen wie Elektronen in bestimmten Situationen Welleneigenschaften an den Tag legen und im Gegenzug elektromagnetische Wellen wie Licht auch Teilchencharakter haben können. Dieser als *Welle-Teilchen-Dualismus* bekannt gewordene Effekt ist philosophisch betrachtet höchst interessant, da diese Erscheinung auf mehreren Wegen interpretiert werden kann: So könnte man aus der Alltagserfahrung heraus argumentieren, dass ein „Gegenstand“ nicht *gleichzeitig* zwei konträre Eigenschaften in sich vereinigen kann, wie es scheinbar bei Licht der Fall ist.

Betrachtet man die Problemstellung allerdings vom Standpunkt der Quantenmechanik aus, so ist die gängige Argumentation, dass der Mesokosmos, in der sich unser Leben abspielt, nicht mit dem Mikrokosmos verglichen werden kann, da Quanten und Atome

„...nicht so eindeutig in die objektive Welt der Dinge gehören.“¹⁰²

wie Werner Heisenberg in seinem Buch „Der Teil und das Ganze“ ein Gespräch mit seinem Freund Robert zitiert. Doch wenn Objekte auf Quantenebene nicht zur objektiven Welt der Dinge gehören, von welcher Qualität sind sie dann und warum können sie dennoch unsere objektive – reale – Welt formen?

Der rationale René Descartes würde an dieser Stelle einwenden, dass wir uns a priori keineswegs sicher sein können, ob das, was wir täglich erleben und als real annehmen, tatsächlich real *ist*. Der Platoniker würde zudem anfügen, dass das, was wir sehen und wahrnehmen nur die Schatten der Wirklichkeit sind und wir uns – wie die Gefangenen in Platons weltberühmtem Höhlengleichnis – erst von unseren Fesseln befreien müssen, um die tatsächliche Wirklichkeit zu erkennen. Jene Wirklichkeit stellt sich Platon – für seine Zeit höchst mathematisch – als aus rechtwinklig gleichschenkligen und halbierten gleichseitigen Dreiecken aufgebaut vor. Diese philosophische Vorstellung, dass die Welt aus kleinsten Teilchen, die später von Demokrit als „*atomos*“ angesehen wurden, aufgebaut ist, bildet noch heute die Basis unseres physikalischen Naturverständnisses. Außerdem spiegelt sich darin bereits die später durch Galileo Galilei verbalisierte Idee

„ ..., dass die Mathematik das Alphabet ist, mit dem Gott die Welt geschrieben hat.“¹⁰³

wider. Trotz komplexester Experimente, von denen wir uns neue Erkenntnisse über das Wesen der Natur erhoffen, bin ich doch überzeugt, dass unsere bisher entdeckten Naturgesetze nur einen winzigen Bruchteil der Wirklichkeit zu beschreiben vermögen und

„ ...es absolut möglich ist, dass jenseits der Wahrnehmung unserer Sinne ungeahnte Welten verborgen sind.“¹⁰⁴

die wir – vielleicht auch mithilfe von Erkenntnissen aus der Chaostheorie oder der Welt der Fraktale – hoffentlich bald entdecken und ergründen werden.

¹⁰² Heisenberg, Werner, *Der Teil und das Ganze – Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, 1984, S. 21

¹⁰³ Galileo Galilei

¹⁰⁴ Albert Einstein

6. Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Facharbeit ohne fremde Hilfe, und nur unter Benutzung der im Literaturverzeichnis aufgeführten Quellen angefertigt habe.

(Ort, Datum)

(Unterschrift des Kollegiaten)

- [13] LORENZ, Edward N., *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's wings Set Off a Tornado in Texas?*, American Association For The Advancement Of Science, 139th Meeting, 29. 12.1972
URL: http://www.google.de/url?sa=t&source=web&cd=4&ved=0CCoQFjAD&url=http%3A%2F%2Fapsweb.mit.edu%2Fresearch%2FLorenz%2FButterfly_1972.pdf&rct=j&q=Predictability%3A%20Does%20the%20flap%20of%20a%20butterfly's%20wings%20in%20Brazil%20set%20off%20a%20tornado%20in%20Texas%3F&ei=1xfVTPHzHcqEOpJxc4J&usg=AFQjCNGqJIVzlgKDOO4z3883uNF0JtwXiA (aufgerufen am 15.08.2010)
- [14] LÜDI, Gregor/LÜSCHER, Martin, *Was sind selbstähnliche Strukturen?*, 2007
URL: <http://www.natur-struktur.ch/fraktale/selbstaehnlich.html> (aufgerufen am 03.08.2010)
- [15] MANDELBROT, Benoît B., Originalausgabe: *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W. H. Freeman and Company, 1977, 1982, 1983; deutschsprachige Ausgabe: *Die fraktale Geometrie der Natur*, Basel, Birkhäuser Verlag, 1987 (Einmalige Sonderauflage, 1991)
- [16] MAUGH, Thomas H. II, *His computer riddle let to chaos theory*, in: Los Angeles Times, Eddy W. Hartenstein (Hrsg.), 18.04.2008
URL: <http://articles.latimes.com/2008/apr/18/local/me-lorenz18/> (aufgerufen am 01.11.2010)
- [17] MÜNSTER, G., Prof. Dr., *Selbstorganisation in Systemen fern vom Gleichgewicht I, II*, 2007, auf: Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Institut für Theoretische Physik
URL: <http://pauli.uni-muenster.de/tp/menu/forschen/ag-friedrich/lehre/theoretische-nichtlineare-physik-i-ii.html> (aufgerufen am 02.10.2010)
- [18] OESCHGER, Andreas/METTLER, David/SÄGESSER, Tobias, *Fibonacci*, 2008, auf: Fibonacci,
URL: <http://fibonacci.stefanruf.ch/Facharbeit.pdf> (aufgerufen am 07.11.2010)
- [19] PEITGEN, Heinz-Otto u.a.: *Bausteine des Chaos – Fraktale*, Stuttgart, Klett-Cotta/Springer-Verlag, 1992
- [20] PEITGEN, Heinz-Otto u.a.: *Chaos – Bausteine der Ordnung*, Stuttgart, Klett-Cotta/Springer-Verlag, 1994
- [21] RIEGELMAN, Kathy, Rev., *Butterfly Wings and Burning Children*, All Souls Unitarian Universalist Church, Kansas City, Missouri, 12.08.2007
URL: www.allsoulskc.org/sunday/sermons/081207.pdf (aufgerufen am 10.08.2010)
- [22] SCHLICHTING, Joachim H., *Schöne fraktale Welt – Annäherung an ein neues Konzept der Naturwissenschaften*, in: MNU – Der mathematisch und naturwissenschaftliche Unterricht 45, Prof. Dr. Bernd Ralle (Hrsg.), Nr. 4, 1992, S. 202-214
URL: http://www.google.de/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBcQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.wwu-muenster.de%2Fimperia%2Fmd%2Fcontent%2Ffachbereich_physik%2Fdidaktik_physik%2Fpublikationen%2Fsch_ne_fraktale_welt.pdf&ei=ZBbpTM3sBIvysgbe0aGPCQ&usg=AFQjCNHL7F65BaMrL9s0RW2kLrZBXVbGyw (aufgerufen am 12.10.2010)
- [23] SCHLICHTING, Joachim H., *Fraktales Wachstum am Beispiel der fingerartigen Durchdringung zweier Flüssigkeiten*, in: Physik in der Schule, Dr. Martin Hopf u.a. (Hrsg.), Heft 31/3, 1993, S. 113-117
URL: http://www.google.de/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBcQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.uni-muenster.de%2Fimperia%2Fmd%2Fcontent%2Ffachbereich_physik%2Fdidaktik_physik%2Fpublikationen%2Ffraktales_wachstum.pdf&ei=4RTpTMjrDs2KswbBysWzCw&usg=AFQjCNF7MGLentvV4br_W2XREinDMn_I_Lg (aufgerufen am 18.09.2010)
- [24] SCHMIDT, Alfred, *Sind Philosophen verrückt – oder: Wittgenstein und das Lachen der thrakischen Magd*, in: biblos – Beiträge zu Buch, Bibliothek und Schrift, Band 50, Heft 1, 2001, S. 107 -114

- [25] STANGL, Werner, Dr., *Was ist Kausalität?*, 2010, auf: Werner Stangl's Arbeitsblätter
URL: <http://arbeitsblaetter.stangl-taller.at/ERZIEHUNGSWISSENSCHAFTGEIST/-Kausalitaet.shtml> (aufgerufen am 03.11.2010)
- [26] VICSEK, Tamás: *Fractal growth phenomena*, Singapur, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1989
URL: <http://books.google.de/books?hl=de&lr=&id=InnD-GTUi0gC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Vicsek,+Tam%C3%A1s:+Fractal+growth+phenomena,+Singapur,+World+Scientific+Publishing+Co.+Pte.+Ltd.,+1989&ots=uG-kC-QjQQ&sig=dezwwNJV3hnjCAhMwyol85olheA#v=onepage&q&f=false> (aufgerufen am 23.10.2010)
- [27] WEISSTEIN, Eric. W., *Poincaré, Henri (1854-1912)*, 1996 – 2007, auf: Wolfram MathWorld
URL: <http://scienceworld.wolfram.com/biography/Poincare.html> (aufgerufen am 01.11.2010)
- [28] WEISSTEIN, Eric W., *Capacity Dimension*, 1999-2010 auf: Wolfram MathWorld
URL: <http://mathworld.wolfram.com/CapacityDimension.html> (aufgerufen am 08.09.2010)
- [29] WIKIPEDIA – Die freie Enzyklopädie
- [a] Artikel: *Attraktor*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Attraktor> (aufgerufen am 16.09.2010)
- [b] Artikel: *Determinismus*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Determinismus> (aufgerufen am 10.08.2010)
- [c] Artikel: *Fraktal*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal> (aufgerufen am 29.08.2010)
- [d] Artikel: *Goldener Schnitt*
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt (aufgerufen am 31.09.2010)
- [e] Artikel: *Hausdorff-Dimension*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Hausdorff-Dimension> (aufgerufen am 13.10.2010)
- [f] Artikel: *Helge von Koch*
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch (aufgerufen am 25.09.2010)
- [g] Artikel: *Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorem*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Kolmogorow-Arnold-Moser-Theorem> (aufgerufen am 15.10.2010)
- [h] Artikel: *Schmetterlingseffekt*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Schmetterlingseffekt> (aufgerufen am 11.08.2010)
- [i] Artikel: *Selbstähnlichkeit*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Selbst%C3%A4hnlichkeit> (aufgerufen am 17.11.2010)
- [j] Artikel: *Selbstorganisation*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Selbstorganisation#Eigenschaften> (aufgerufen am 20.09.2010)
- [k] Artikel: *Systemtheorie*
URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Systemtheorie> (aufgerufen am 21.09.2010)
- [30] WOHLGEMUTH, Martin, *Definition eines Fraktals?*, auf: Matroids Matheplanet, 15.10.2007
URL: <http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1125#defin> (aufgerufen am 30.08.2010)

Abbildungsverzeichnis

- [Titelbild] URL: http://farm1.static.flickr.com/51/140198122_bd94e7d9b5_o.jpg
- [Abb. 1] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/71/Septem-artes-liberales_Herrad-von-Landsberg_Hortus-deliciarum_1180.jpg/457px-Septem-artes-liberales_Herrad-von-Landsberg_Hortus-deliciarum_1180.jpg
- [Abb. 2] URL: <http://media3.washingtonpost.com/wp-dyn/content/photo/2008/04/16/PH2008041603824.jpg>
- [Abb. 3] URL: http://www.leifiphysik.de/web_ph10_g8/umwelt_technik/07kausalitaet/kausalitaet/kausalit01.gif
- [Abb. 4] URL: http://www.leifiphysik.de/web_ph10_g8/umwelt_technik/07kausalitaet/kausalitaet/kausalit02.gif
- [Abb. 5] URL: http://www.leifiphysik.de/web_ph10_g8/umwelt_technik/07kausalitaet/kausalitaet/kausalit03.gif
- [Abb. 6] URL: <http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-637/lectures/codes/intro/pics/lorenzmioA.jpg>
- [Abb. 7] URL: http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/uploads3/1790_dust.jpg
- [Abb. 8] URL: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/70/Hilbert-Kurve.png>
- [Abb. 9] URL: http://www.xup.in/pic/60965728/Deckblatt_Quali.png
- [Abb. 10] URL: http://maciaszek.net/wp-content/uploads/2010/10/Mandelbrot-Menge_farbig.png
- [Abb. 11] URL: [http://de.academic.ru/pictures/dewiki/75/Koch_curve_\(L-system_construction\).jpg](http://de.academic.ru/pictures/dewiki/75/Koch_curve_(L-system_construction).jpg)
- [Abb. 12] URL: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/ad/Sierpinski-Trigon-7.svg/660px-Sierpinski-Trigon-7.svg.png>
- [Abb. 13] URL: http://www.xlll.de/images/Goldener_Schnitt_Bluetenstand_Sonnenblume.jpg?w=180&h=145
- [Abb. 14] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/db/Goldener_Schnitt_Blattstand.png
- [Abb. 15a] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/57/Pythagoras_tree_construct_1of5.png
- [Abb. 15b] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d8/Pythagoras_tree_construct_2of5.png
- [Abb. 15c] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/8/87/Pythagoras_tree_construct_3of5.png
- [Abb. 15d] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Pythagoras_tree_construct_4of5.png
- [Abb. 15e] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b9/Pythagoras_tree_construct_5of5.png
- [Abb. 15f] URL: <http://www.pohlig.de/Unterricht/Inf2003/Tag18/Bilder/Pythagoras1.gif>
- [Abb. 16] URL: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Pythagoras_baum_color_random.png
- [Abb. 17] URL: <http://shannoninstitute.ucd.ie/~jzumbro/fractals/fracfarn.html#farn>
- [Abb. 18] URL: http://www.google.de/url?sa=t&source=web&cd=2&ved=0CB0QFjAB&url=http%3A%2F%2Fwww.uni-ulm.de%2Ffileadmin%2Fwebsite_uni_ulm%2Fmawi_inst.110%2Fmitarbeiter%2Fspodarev%2Fpublications%2Ffraktale.pdf&rct=j&q=Philosophie%20der%20Fraktale&ei=gvboTLeOBY31sgbDmLjCCw&usg=AFQjCNEA_Ke9o0mx6gRZcThhmNQRexKKLA
- [Abb. 19] URL: http://bilder.bild.de/BILD/news/leserreporter/2009/07/23/unwetter-blitz-gewitter/unwetter-blitz-blitz-gewitter-wetter-deutschland-01-wannweil-12914828_MBOF-1248349926,templateId=renderScaled,property=Bild,height=349.jpg
- [Abb. 20] URL: http://de.academic.ru/pictures/dewiki/68/DLA_Cluster.JPG
- [Abb. 21] URL: <http://de.academic.ru/pictures/dewiki/80/PlanePair2.jpg>
- [Abb. 22] URL: <http://www.google.de/url?sa=t&source=web&cd=1&ved=0CBkQFjAA&url=http>

www.uni-muenster.de/Fimperia/Fmd/content/2Ffachbereich_physik/2Fdidaktik_physik/2Fpublikationen/2Fstrukturbildungsnetzwerk.pdf&rct=j&q=strukturbildungsnetzwerk&ei=6ffoTMi0BoaRswbMwJ2PCO&usg=AFQjCNHHlxYcQthmVSfOTqj1W51GjovZHA

Anhänge

Auf der beiliegenden CD, auf welche im Verlaufe dieser Facharbeit mehrmals hingewiesen wurde, befinden sich neben den bereits angesprochenen Java-Applets und weiteren Simulationen zudem alle genutzten Internetseiten im pdf-Format, sowie weiterführende Materialien.