

Die Bogenlänge von Kreis,
Ellipse und Parabel

Philipp Düren

Holbein-Gymnasium Augsburg

Kollegstufenjahrgang 2008/2009

F A C H A R B E I T

aus dem Fach

Mathematik

Die Bogenlänge bei Kreis, Ellipse und Parabel

Verfasser der Facharbeit:
Leistungskursbezeichnung:
Kursleiter:
Abgabetermin:

Philipp Düren
M23
Lothar Heimbürger
30. Januar 2009

Abgegeben am:
Mündliche Prüfung abgelegt am:

Erzielte Punkte der schriftlichen Arbeit:
Erzielte Punkte der mündlichen Prüfung:

Gesamtpunktzahl (3-fach schriftlich + mündlich = 4-fache Wertung):
Doppelte Wertung (= 4-fache Wertung geteilt durch 2, gerundet):
Aus der einfachen Wertung (= 4-fache Wertung geteilt durch 4, gerundet):
ergibt sich für die Gesamtleistung die Note _____, in Worten:

Unterschrift des Kursleiters:

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und Vorkenntnisse	1
2	Definition der Bogenlänge	2
2.1	Kartesisch	2
2.2	Polar	4
2.3	In Parameterdarstellung	7
2.4	Translationsinvarianz	9
2.4.1	Polar	10
2.4.2	Kartesisch	10
2.4.3	Parametrisiert	10
3	Die Bogenlänge des Kreises und die Zahl π	10
3.1	Kartesische Bogenlängenberechnung des Kreises	10
3.2	Polare Bogenlängenberechnung des Kreises	12
3.3	Der Kreis mit Radius 4	12
4	Die Bogenlänge der Ellipse	12
4.1	Wiederholung: Die Ellipse	12
4.2	Die Bogenlängenfunktion der Ellipse	15
4.3	Vergleich der Näherungen für den gesamten Ellipsenumfang	15
4.4	Die Bahn des Pluto	16
5	Die Bogenlänge der Parabel	16
5.1	Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus	16
5.2	Herleitung der Bogenlänge der Parabel	17
5.3	Die Bogenlänge der Parabel $2x^2$	19
6	Zusammenfassung	20
A	Hyperbolische Funktionen	21
B	Beweise	22
B.1	Die Rekursionsformel zur Integration	22
B.2	Umformung für den Sinus	22
B.3	Umformung für den Sinus Hyperbolicus (I)	22
B.4	Umformung für den Sinus Hyperbolicus (II)	23
B.5	Umformung für den Cosinus Hyperbolicus	23
C	Die Bogenlänge der Ellipse (ausführliche Herleitung)	23
C.1	Exkurs: MacLaurinsche Reihe	24
C.2	Anwendung der MacLaurinschen Reihe auf das elliptische Integral	26
C.3	Rekursionsformel zur Integrationshilfe	27
C.4	Die allgemeine Formel für die Länge von Ellipsensegmenten	29
D	Literaturnachweis	31
E	Abbildungsverzeichnis	31

1 Motivation und Vorkenntnisse

In dieser kurzen Abhandlung soll im Folgenden der mathematische Begriff der *Bogenlänge* im Rahmen einer Facharbeit schülergerecht bearbeitet werden. Unter der Bogenlänge versteht man ganz pauschal und intuitiv die Länge, die der Graph einer Funktion auf einem Intervall annimmt. Eine Anwendung der Bogenlängenberechnung wäre zum Beispiel die Ermittlung der benötigten Länge eines Drahtseils für eine Hängebrücke (näherungsweise parabelförmig, s. Abb.) oder des zurückgelegten Weges eines Himmelskörpers (kreis-, ellipsen- oder hyperbelförmig). Im Schlussteil soll auf eine dieser Anwendungen näher eingegangen werden. Der Funktionsbegriff ist für die folgenden Ausführungen von tragender Bedeutung, es folgt eine kurze Wiederholung. Mathematisch schreibt sich die Definition einer Funktion f folgendermaßen:

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{W}$$
$$x \mapsto y$$

Die zugehörige Punktmenge lässt sich also darstellen als $\{x; y \mid x \in \mathbb{D}; y = f(x)\}$ und wird G_f , d. h. Graph von f genannt (siehe Abb. 1).

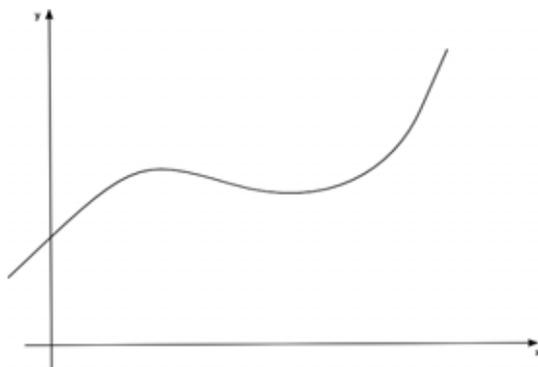


Abbildung 1: Kartesisches Koordinatensystem und Graph

Sind \mathbb{D} und \mathbb{W} Teilmengen des reellen Zahlenkörpers, kann man folgendermaßen vorgehen: Den Graphen visualisiert man gewöhnlich in einem kartesischen Koordinatensystem. Dort trägt man x - und y -Werte aufeinander ab (siehe Abb.). Doch die Beschreibung von Funktionen mithilfe einer Funktionsgleichung wie zum Beispiel $y = x^2$ ist nicht die einzige Möglichkeit. Manche Graphen lassen sich einfacher durch die sogenannte Parameterdarstellung ausdrücken. Dies bedeutet, dass sich jeder Punkt $\in G_f$ eindeutig mit einem Parameter identifizieren lässt. Ein Beispiel dafür wäre der Kreis mit Radius r : Kartesisch lässt er sich nur als Kombination von zwei Halbkreisen darstellen, da es für den x -Wert 0 (wenn man als Beispiel den Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0/0)$ nimmt) die dazugehörigen y -Werte 1 und -1 gäbe. Der Graph des Kreises mit Radius r mit Mittelpunkt $(0/0)$ hieße also: $G_f = \{x; \sqrt{r^2 - x^2}\} \cup \{x; -\sqrt{r^2 - x^2}\} r \in \mathbb{R}, x \in [-r; r]$. Mit der Parameterdarstellung lässt sich der Kreis jedoch viel leichter ausdrücken: Es gilt selbstverständlich (Winkelfunktionen)

$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Die Punktmenge des Graphen ist also: $\{r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi \mid r \in \mathbb{R}; \varphi \in [0; 2\pi]\}$. φ ist hierbei der Parameter. Statt der kartesischen Darstellung kann man sich auch der sogenannten Polarkoordinaten bedienen. Hier sind die Punkte der Ebene nicht durch $(x; y)$ festgelegt, sondern werden durch ihre Position auf konzentrischen Ringen mit Mittelpunkt $(0/0)$ mit Radius r bestimmt. Durch die Koordinate r schränkt man die Menge der Punkte erst vom \mathbb{R}^2 auf die Menge aller Punkte auf dem Kreis mit Radius r ein und dann durch ihren Schnittwinkel zwischen Abszisse und einer Ursprungsgeraden (die durch den gewünschten Punkt geht) auf einen einzelnen Punkt ein. Stellt man eine Beziehung zwischen Bogenlänge/Bogenmaß und Winkeln her, so sieht man hier die Ähnlichkeit zwischen der polaren und der Parameterdarstellung des Kreises. Die hier eben intuitiv gesetzte Synonymisierung von Bogenlänge und Bogenmaß werden wir in Kapitel 2.3.2 bestätigen.

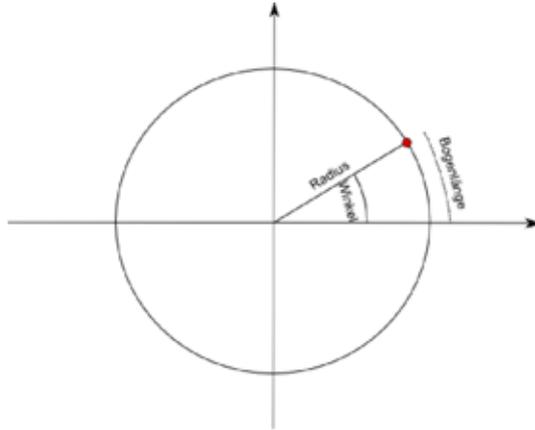


Abbildung 2: Charakterisierung eines Punktes durch Polarkoordinaten

2 Definition der Bogenlänge

Vorbemerkung:

1.: Der Begriff der Bogenlänge von Funktionen wird hier selbstverständlich nur auf Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezogen.

2.: In dieser Arbeit wird die Bogenlänge mit L bezeichnet und analytisch mithilfe eines Integrals hergeleitet. Dadurch entsteht jeweils eine Stammfunktion, wobei nur die Differenz zweier Instanzen dieser Stammfunktionen mit jeweils einem anderen Parameter (z. B. $L(a) - L(b)$) oder gleichem Parameter ($L(a) - L(a) = 0$) mathematisch Sinn ergibt, da die herausgerechnete Stammfunktion alleine noch keine Zahl ist, sondern eine Menge von Funktionen. Hiermit wird darauf hingewiesen, dass die Schreibweise L_b^a dasselbe bedeuten soll wie $L(a) - L(b)$, ganz im Sinne der Integralrechnung. L alleine (ohne die Indizes) aber bedeutet im Folgenden einfach nur „Stammfunktion zur Berechnung der Bogenlänge“

Die Bogenlänge ist eine Eigenschaft einer Kurve. Man kann sie beispielsweise als den Weg interpretieren, den ein Objekt auf der Kurvenbahn zurücklegt. Die mathematische Definition folgt nun.

Hat man einen Graphen G , so kann man die Bogenlänge folgendermaßen herleiten: Man approximiert den Graphen durch einen Polygonzug, wobei der Abstand in reiner Abszissenrichtung (Δx) konstant sei. Durch Summation der Längen der Einzelstrecken des Polygonzuges, welche wir forthin mit s bezeichnen, kann man die Bogenlänge annähern. Es ist naheliegend (und den strengen Beweis werden wir hier nicht führen), dass die Näherung für steigende Anzahl der Einzelstrecken und somit sinkender Größe von Δx immer besser wird, weil die Geradenstücke immer kleiner werden und sich der Polygonzug dem Graphen enger anschmiegt. Wir bezeichnen die Bogenlänge fortan mit L .

2.1 Kartesisch

Wir bezeichnen das Intervall, das die senkrechte Projektion des Teils des Graphens ist, dessen Bogenlänge wir berechnen wollen, mit $I = [a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$. Wir unterteilen I nun in n gleichgroße Teilintervalle $I_k = [a + (k - 1) \cdot \Delta x; a + k \cdot \Delta x]$; $k \in \{1; \dots; \frac{b-a}{\Delta x}\}$, wobei $\frac{b-a}{\Delta x} \in \mathbb{N}$ (siehe Abb. 3). Die Abszissenintervalle haben also jeweils die Breite Δx , der über den Graphen zugeordnete Höhenunterschied wird mit Δy_k bezeichnet. Weil der Höhenunterschied bei jedem Intervall unterschiedlich ist, ist jedem Intervall I_k ein Ordinatenunterschied

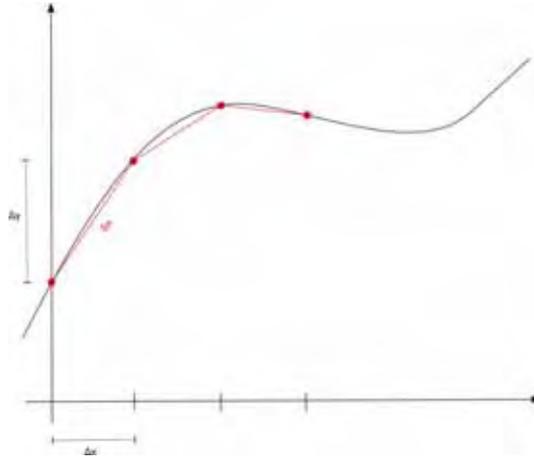


Abbildung 3: Streckenmethode zur Approximation der Bogenlänge

Δy_k zugeordnet.

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n s_i \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \\
 &\stackrel{*}{=} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx
 \end{aligned}$$

(*): Siehe die Definition des Integrals als Grenzwert einer Summe.

Durch Weglassen der Grenzen erhalten wir die allgemeinere Form durch das unbestimmte Integral, und wir definieren:

$L := \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (\text{I})$	Definition der Bogenlängenfunktion für eine Funktion mit kartesischen Koordinaten
--	---

Wir sehen hier: Die Bogenlänge lässt sich als *Funktion* auffassen, genauer als Integralfunktion. Mit diesem Term lässt sich jede Bogenlänge darstellen, deren Graph durch eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gebildet wird. Dass sie darstellbar ist, bedeutet aber nicht zwangsläufig, dass der Term leicht zu vereinfachen ist! Das werden wir bei der Parabel, aber insbesondere bei der Ellipse bemerken.

Zur Verifikation unserer Formel überprüfen wir sie an einem Fall, bei dem die Bogenlänge auch ganz einfach ohne diese Formel berechnet werden kann: Die Gerade.

Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. Wir wollen die Bogenlänge von $x = -1$ bis $x = 2$ bestimmen. Natürlich ist die Länge dieses Geradenstücks $l = \sqrt{3^2 + 1,5^2} = \sqrt{11,25} = \frac{3}{2}\sqrt{5} \approx 3,354$. Mit unserer

Formel (I) müsste dasselbe herauskommen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}x + 3 \\
 f'(x) &= \frac{1}{2} \\
 L_{-1}^2 &= \int_{-1}^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \, dx \\
 &= \int_{-1}^2 \sqrt{\frac{5}{4}} \, dx \\
 &= 2\sqrt{\frac{5}{4}} - \left(-\sqrt{\frac{5}{4}}\right) \\
 &= \frac{3}{2}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Hier wird unsere Formel also schon einmal nicht widerlegt.

2.2 Polar

Ist die Funktion, deren Bogenlänge man berechnen soll, nicht in kartesischen, sondern in Polarkoordinaten vorhanden, so bedient man sich der Formel, die wir nun herleiten werden.

Der Graph der Funktion, dessen Bogenlänge wir bestimmen wollen, ist nun:

$G = \{P(r; \varphi) | r \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Wie bereits vorher angesprochen, wird nun jeder Punkt des Graphen dargestellt durch das Paar von Radius und Winkel, das jeden Punkt der Ebene eindeutig festlegt. Zur Bogenlängenbestimmung nähern wir den Graphen wieder mit einem Polygonzug mit den Kanten s an, wir definieren s allerdings anders. Wir legen durch den Ursprung ein Geradenbüschel, wobei der Winkel zwischen zwei nebeneinanderliegenden Geraden $d\varphi$ sei. Die Strecken s sind dann die Streckenstücke zwischen den benachbarten Schnittpunkten zweier Geraden mit dem Graphen (siehe Abb. 4). Hier verzichten wir absichtlich auf die Angabe von Grenzen a und b , weil erstens die Angabe von Intervallgrenzen hier in Vielfachen von φ angegeben sein müssten (wie wir erst später sehen werden) und wir zweitens leichter mit der allgemeinen Form, dem unbestimmten Integral, rechnen können.

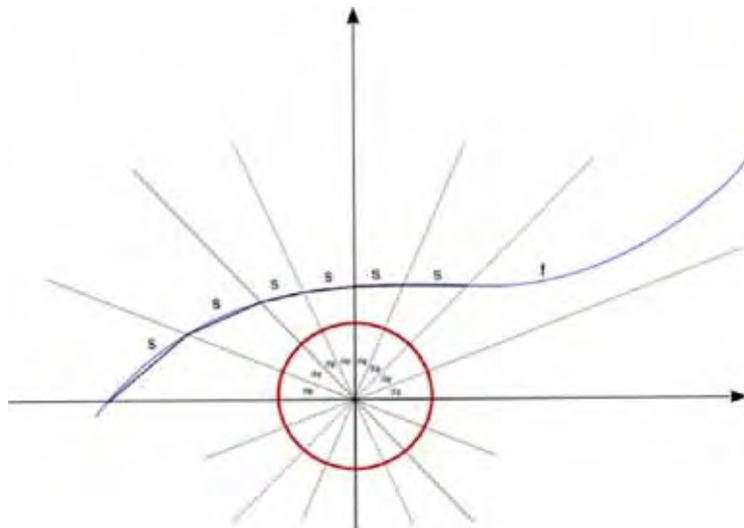


Abbildung 4: Approximation der Bogenlänge durch Strecken (Schnittpunkte bezüglich Ursprung auf gleichen Winkeln)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 L &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum s \\
 &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum \frac{s}{\Delta\varphi} \cdot \Delta\varphi \quad \text{formaler Schritt} \\
 &= \int \frac{s}{d\varphi} \cdot d\varphi \\
 &\stackrel{*}{=} \int \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{d\varphi} \cdot d\varphi \\
 &= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\
 \text{mit } x &= r \cdot \cos \varphi \\
 \text{und } y &= r \cdot \sin \varphi \\
 \frac{dx}{d\varphi} &= r' \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi \\
 \frac{dy}{d\varphi} &= r' \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \\
 \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 &= r'^2 \cdot \cos^2 \varphi - 2r'r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi \\
 \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 &= r'^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2r'r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi
 \end{aligned}$$

$$L = \int \sqrt{r'^2 \cos^2 \varphi - 2r'r \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r'^2 \sin^2 \varphi + 2r'r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$L = \int \sqrt{r'^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)} d\varphi$$

(*): Achtung, wir kennen dx und dy natürlich nicht, wir führen sie aber trotzdem ein, weil wir sie später durch unseren Winkel φ darstellen können. Damit haben wir:

$L = \int \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi \quad (\text{II})$	Definition der Bogenlänge einer Funktion in Polarkoordinaten
---	--

Es gibt ein Problem bei dieser Darstellung: Für manche Graphen ist $r(\varphi)$ nicht eindeutig, wie etwa für den Graphen der Funktion $y = x$. Hier gibt es keine Möglichkeit, die kartesische Form in eine Polare umzuformen, da der Winkel konstant ist (nämlich 45°), es aber verschiedene Radien gibt.

Auch hier lässt sich die Bogenlängenformel mithilfe der Geraden überprüfen, wenn es auch sehr konstruiert wirkt, eine Gerade durch Polarkoordinaten darzustellen (siehe Abb. 5). Wir nehmen wieder eine Gerade, die parallel zur x-Achse ist.

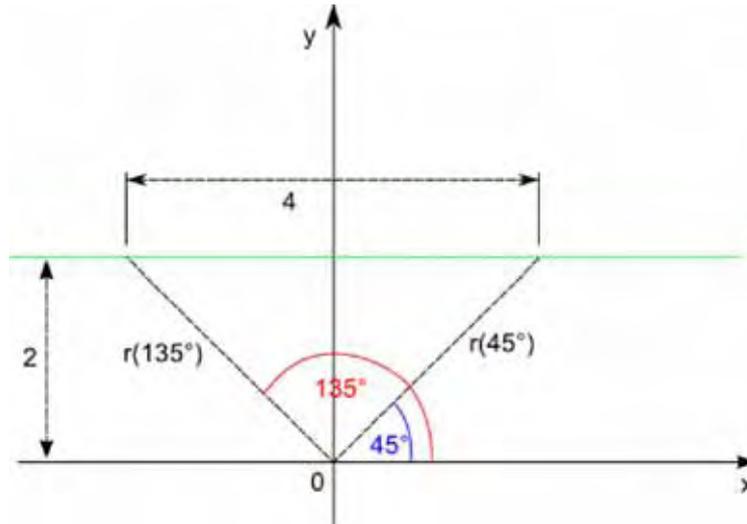


Abbildung 5: Gerade (grün) in Polarform

Wie man sehen kann, gilt (im rechtwinkligen Dreieck OPP', wobei P' die senkrechte Projektion von P auf die x-Achse ist):

$$\frac{2}{r(\varphi)} = \sin \varphi \quad r(\varphi) = \frac{2}{\sin \varphi},$$

wobei $\varphi \in]0; \pi[$, in diesem Intervall hat der Sinus keine Nullstellen, die Randpunkte sind der Fall, in dem die Strecke, dessen Betrag der Radius ist, waagrecht steht (also unendlich lang ist). Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= \frac{2}{\sin \varphi} \\ \Rightarrow r'(\varphi) &= -\frac{2 \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \\ \Rightarrow r'^2(\varphi) &= \frac{4 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} \\ r^2(\varphi) &= \frac{4}{\sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Also ist die Bogenlänge nach Formel (II) berechenbar durch

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{\frac{4 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} + \frac{4}{\sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \int \sqrt{\frac{4 \cos^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} + \frac{4 \sin^2 \varphi}{\sin^4 \varphi}} d\varphi \\ &= \int \sqrt{\frac{4(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{\sin^4 \varphi}} d\varphi \\ &= \int \sqrt{\frac{4}{\sin^4 \varphi}} d\varphi \\ &= \int \frac{2}{\sin^2 \varphi} d\varphi \\ L &\stackrel{\text{Formelsammlung}}{=} -\frac{2}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

Nehmen wir an, wir wollten das Stück der Geraden berechnen, das jeweils 2 LE über die y-Achse hinausragt. Diese Endpunkte entsprechen den Winkeln $\varphi = 45^\circ$ und $\varphi = 135^\circ$.

Geometrisch sieht man sofort, dass die Bogenlänge 4 sein muss, die sollte unsere Formel bestätigen.

$$\begin{aligned} L_{45^\circ}^{135^\circ} &= -\frac{2}{\tan 135^\circ} - \left(-\frac{2}{\tan 45^\circ} \right) \\ &= 2 - (-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Und das tut sie offensichtlich. (Über den Sinn, eine Gerade durch Polarkoordinaten darzustellen, lässt sich natürlich streiten)

2.3 In Parameterdarstellung

Als dritten und letzten Fall betrachten wir den Fall, dass die Funktion in der Parameterdarstellung gegeben ist. Das bedeutet, dass der Graph in der Form

$$G = \{(x(t), y(t)) : t \in \mathbb{R}\}$$

gegeben ist, wobei t der Parameter ist. Die Formel ähnelt sehr der kartesischen Form. Der Parameter sei hier t genannt. Da die Technik parametrisierter Kurven in der Schule nur peripher behandelt wird, werden wir das Thema kurz aufarbeiten:

Das Besondere an parametrisierten Kurven ist, dass der Graph nicht mehr über den Zusammenhang $x \mapsto y$, sondern durch $t \mapsto (x(t)|y(t))$ gegeben ist. Das bedeutet, dass ein von den Koordinaten weitestgehend unabhängiger Wert beide Koordinaten gleichzeitig festlegt, nicht so wie bei der aus der Schule bekannten Form, dass jedem x ein y zugeordnet ist. Dies hat etwa den Vorteil, dass man mithilfe einer Parametrisierung einen ganzen Kreis im Koordinatensystem darstellen kann, statt immer die obere oder untere Hälfte „abschneiden“ zu müssen. Das liegt daran, dass nun nicht mehr gilt „nicht mehr als ein y -Wert pro x -Wert“, sondern „nicht mehr als ein Punkt $P(x(t)|y(t))$ pro t -Wert“. Es folgen noch ein paar Beispiele:

Beispiel 1: Die waagerechte Gerade Dies ist eine der einfachsten parametrisiert darstellbaren Kurven. Da jeder Punkt des Graphen den y -Wert c hat (c sei der Abstand der Geraden von der zu ihr parallelen x -Achse), ist $y(t)$ nicht von t abhängig, sondern konstant:

$$y(t) = c$$

$x(t)$ ist vollkommen beliebig (auch weil $y(t)$ nicht von t abhängt), es sollte nur darauf geachtet werden, dass von der Formel von $x(t)$ alle Werte in \mathbb{R} angenommen werden können. Möglichkeiten für $x(t)$:

$x_1(t) = t$	Hier ist jedem t -Wert ein genauso großer x -Wert zugeordnet, also $t = 2 \Rightarrow x(t) = 2$
$x_2(t) = t^2$	Hier ist jedem t -Wert der quadratisch größere x -Wert zugeordnet: $t = 2 \Rightarrow x(t) = 4$
$x_3(t) = \frac{1}{t}$	Das ist ebenfalls möglich ($t = 2 \Rightarrow x(t) = 0,5$), für $x = 0$ müssen wir allerdings den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ laufen lassen

Beispiel 2: Die allgemeine Gerade Nehmen wir an, die Gerade sei in der Form $y = a \cdot x + b$ gegeben. Dies ist äquivalent zu $y(t) = a \cdot x(t) + b$. Wir nehmen nun eine beliebige Formel für $x(t)$, am Besten einfach

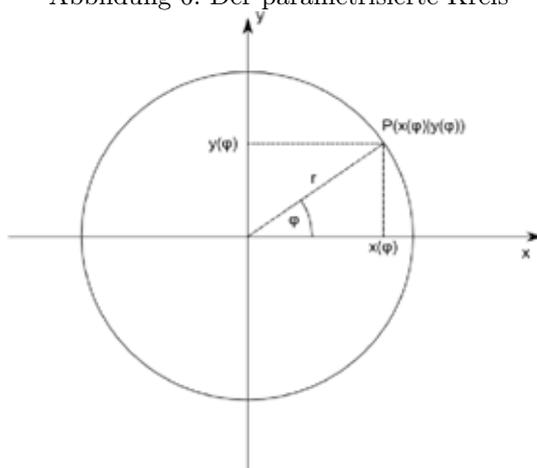
$$x(t) = t.$$

Dann gilt für $y(t)$:

$$y(t) = a \cdot x(t) + b = a \cdot t + b$$

Wäre $x(t) = t^2$, so gäbe dementsprechend: $y(t) = a \cdot t^2 + b$.

Abbildung 6: Der parametrisierte Kreis



Beispiel 3: Der Kreis Der Kreis (siehe Abb. 6) ist ein Paradebeispiel für die Parametrisierung. Als Vollkreis ist er in der y-x-Beziehung nicht darstellbar, da mehreren x-Werten kein eindeutiger y-Wert zugeordnet wird. Parametrisieren wir den Kreis, so können wir dieses Problem umgehen: Wir identifizieren jedem t-Wert (wie immer) einen Punkt $P(x(t)|y(t))$. Die Vorstellung dabei ist, dass wir mit den t-Werten die Kreisbahn ablaufen, bis wir wieder am Anfangspunkt ankommen. Wenn diese Periodenlänge, bis wir wieder beim Anfang ankommen a ist, so muss selbstverständlich für unsere Parametrisierung gelten: $x(t+a) = x(t)$ und $y(t+a) = y(t)$. Für die Parametrisierung naheliegend ist der Winkel, auf dem die Punkte bezüglich des Ursprungs auf dem Kreis liegen (hier wird deutlich, dass Polarkoordinaten nur ein Spezialfall für Parametrisierung sind). Um die Parametrisierung herzuleiten, bedienen wir uns der Winkelfunktionen: Durch die gegebenen Identitäten

$$\sin \varphi = \frac{y(\varphi)}{r} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{x(\varphi)}{r},$$

und damit

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r \cdot \cos \varphi \\ y(\varphi) &= r \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

können wir den Kreis als Punktmenge darstellen: $K = \{P(x(\varphi)|y(\varphi))\}$

Nebenbemerkung: Wie wir sehen, erfüllen unsere Terme für x und y auch den Anspruch, periodisch sein zu müssen (damit wir nach dem Durchlaufen eines Intervalls an Parametern wieder am Punkt für $\varphi = 0$ ankommen). Die Periode ist hier 2π , also gilt für $t = 2\pi$: $P(x(2\pi)|y(2\pi)) = P(x(0)|y(0)) = P(r|0)$. Wenn wir den Gedanken weiterspinnen, können wir uns weitere charakteristische Punkte auf dem Kreis suchen: $P(x(3\pi)|y(3\pi)) = P(x(\pi)|y(\pi)) = P(-r|0)$, etc.

Die Formel der Bogenlänge parametrisierter Kurven Doch zurück zur Bogenlängenberechnung: Wie bereits erwähnt, hatten wir den Graphen durch kleine Geradenstücke s angenähert, wobei gilt:

$$L = \int ds$$

Satz des Pythagoras

$$= \int \sqrt{(dx(t))^2 + (dy(t))^2}$$

mit $\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ gilt:

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt$$

$$L = \int \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \quad \text{(III)}$$

Definition der Bogenlänge einer Funktion in Parameterdarstellung

Kurze Bemerkung zu der Vorgehensweise bei der Herleitung: Natürlich ist es unschön und ungewohnt, Integrale ohne angehängte Integrationskonstante zu sehen, zugunsten der deutlich einfacheren Herleitung wird aber auf größere Exaktheit verzichtet.

Wieder ein Vergleich mit einem leicht überprüfbareren Beispiel: Wir suchen die Bogenlänge einer zur x-Achse parallelen Geraden („g“) im Abstand 2 von dieser.

Ihre Parametrisierung sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} P(x(t), y(t)) &\in g : \\ x(t) &= t \\ y(t) &= 2 \end{aligned}$$

Wer dieser Parametrisierung nicht traut, setzt am Besten ein paar Werte für t und verbindet die dadurch entstehenden Punkte $P(x(t), y(t))$. Dadurch entsteht die gewünschte Gerade.

Wir setzen uns zum Ziel, die Bogenlänge von $x = 0$ bis $x = 4$ zu bestimmen. Diese ist selbstverständlich $l = 4$.

Nach unserer Formel gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ \Rightarrow x'(t) &= 1 \\ y(t) &= 2 \\ \Rightarrow y'(t) &= 0 \\ L_0^4 &= \int_0^4 \sqrt{1^2 + 0^2} dt \\ &= 4 - 0 = 4 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich korrekt. Ein weiteres Beispiel, um den Umgang der aus der Schule ungewohnten Parametrisierung zu üben:

Es sei g eine Gerade durch die Punkte $(-1/0)$ und $(1/2)$. Parametrisiert ergibt das zum Beispiel:

$$\begin{aligned} x(t) &= t \\ y(t) &= t + 1 \end{aligned}$$

Auch hier gilt wieder: Werte einsetzen zum Überprüfen. Wir wollen nun die Länge der Strecke durch die beiden Punkte herausfinden. Geometrisch argumentiert ergibt das eine Länge von $l = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Die Bogenlänge nach Formel (III) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} t_1 &= -1 \Rightarrow P(-1/0) \\ t_2 &= 1 \Rightarrow P(1/2) \\ x(t) &= t \\ \Rightarrow x'(t) &= 1 \\ y(t) &= t + 1 \\ \Rightarrow y'(t) &= 1 \\ L_{-1=t_1}^{1=t_2} &= \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + 1^2} dt \\ &= \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Auch hierin funktioniert also unsere Formel.

2.4 Translationsinvarianz

Am Ende der allgemeinen Herleitung der Bogenlänge werden wir die Formeln noch auf *Translationsinvarianz* überprüfen. Das bedeutet, dass wir überprüfen werden, ob sich die Formeln verändern, wenn wir die Funktion $f(x)$ in x- oder y-Richtung verschieben.

2.4.1 Polar

Betrachten wir zuerst den Fall, dass der Graph der Funktion in polarer Darstellung erhalten ist. Natürlich kann sich der Term von $r(\varphi)$ ändern, dann kann man aber erstens nicht mehr von derselben Funktion reden, und zweitens entspricht eine solche Manipulation der Abhängigkeit von r und φ keiner Translation (also Verschiebung), sondern viel eher einer zentrischen Streckung. Dieses Problem könnte man umgehen, indem man den Graphen in einem Koordinatensystem mit r und φ als Achsen definiert, allerdings entspricht das dann wieder einer kartesischen Darstellung.

2.4.2 Kartesisch

Wenn wir nun die Funktion in kartesischer Darstellung gegeben haben, also Formel (I) benutzen, so sieht eine in x - und y -Richtung verschobene Funktion folgendermaßen aus: $f(x - \xi) + \tau$. Hier fällt zuerst der Faktor τ beim Differenzieren von $f(x)$ weg. Die Verschiebung in x -Richtung können wir folgendermaßen kaschieren: Da L eine (Integral-)Funktion ist, gilt für die Bogenlänge einer Funktion $f(x)$ auf $[a;b]$: $L = L(b) - L(a)$. Wenn wir aber eine Funktion $f(x - \xi)$ nehmen, so wird die Bogenlänge zu $L = L(b - \xi) - L(a - \xi)$.

Auch Formel (I) ist also translationsinvariant, allerdings muss die Verschiebung in x -Richtung bei den Integrationsgrenzen berücksichtigt werden. Die Höhe des Graphen über der x -Achse ist aber unerheblich und bleibt unberücksichtigt.

2.4.3 Parametrisiert

Wenn die Funktion in Parameterdarstellung gegeben ist, ist der Graph gegeben durch $(x(t), y(t))$. In x - und y -Richtung verschoben ergibt sich der Graph durch $(x(t) + a, y(t) + b)$. Wir substituieren nun $u(t) := x(t) + a$ und $v(t) = y(t) + b$. Dann ist die Bogenlänge gegeben durch $L = \int \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \dot{v}(t)^2} dt$. Da sich u und x bzw. v und y nur durch einen additiven Faktor unterscheiden, ist deren Ableitung identisch. Daraus folgt die Translationsinvarianz der Bogenlänge auch bei Darstellung durch eine Parametrisierung (und zwar bezüglich Abszisse wie auch Ordinate).

Dass die Berechnung der Bogenlänge von der Verschiebung des Graphen der Kurve unabhängig ist, war zwar intuitiv klar, wir haben das jetzt nun auch bewiesen. Wir werden also von nun an nur noch „normierte“ Graphen betrachten, wie etwa den Einheitskreis (mit Zentrum im Ursprung statt beliebigem Ort), die Parabel durch den Ursprung und die Ellipse mit Mittelpunkt im Ursprung. Dies ist zwar an sich mathematisch unvollständig, aber wie wir gerade gesehen haben, ändert sich durch Translation nichts.

3 Die Bogenlänge des Kreises und die Zahl π

Die Bogenlänge von Kreissegmenten lässt sich leicht auf zwei Weisen berechnen: Man kann sich der analytischen Definition des Kreises, $y^2 = r^2 - x^2$ bedienen, oder aber den Kreis polar darstellen. Die zweite Möglichkeit ist weitaus einfacher, sie setzt jedoch bereits den Begriff der Bogenlänge voraus, dessen Existenz und Größe wir aber erst mithilfe der ersten Methode belegen müssen. Wir beginnen daher mit der kartesischen Herleitung.

3.1 Kartesische Bogenlängenberechnung des Kreises

Für den Ursprungskreis K (seit dem Kapitel über die Translationsinvarianz wissen wir, dass die Betrachtung von verschobenen Funktionen irrelevant ist und jederzeit auf den „Normalfall“ zurückgeführt werden kann) mit Radius r und Punkten $P(x_P, y_P) \in K$ gilt:

$$x_P^2 + y_P^2 = r^2$$

Für die Punkte der oberen Kreishälfte $P(x, y)$, auf die wir uns von nun an beschränken wollen, gilt somit:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} =: f(x)$$

Für die Berechnung der Bogenlängenfunktion benötigen wir noch die quadrierte erste Ableitung, welche gegeben ist durch:

$$(f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

Nach Definition (I):

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= \int \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Wir klammern r aus und substituieren: $x = r \cdot \sin u$, d. h. $x'(u) = \frac{dx}{du} = r \cdot \cos u \Rightarrow dx = r \cdot \cos u \cdot du$ und erhalten damit

$$\begin{aligned} L &= r \cdot \int \sqrt{\frac{1}{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 u}} \cdot r \cdot \cos u \cdot du \\ &= r \cdot \int \sqrt{\frac{r^2 \cdot \cos^2 u}{r^2 - r^2 \sin^2 u}} du \\ &= r \cdot \int \sqrt{\frac{\cos^2 u}{1 - \sin^2 u}} du \end{aligned}$$

Nun bedienen wir uns der Formel $1 = \sin^2 u + \cos^2 u$ ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} L &= r \cdot \int \sqrt{\frac{\cos^2 u}{\cos^2 u}} du \\ &= r \cdot u + \tilde{c} \\ &= r \cdot \arcsin \frac{x}{r} + c \end{aligned} \tag{1}$$

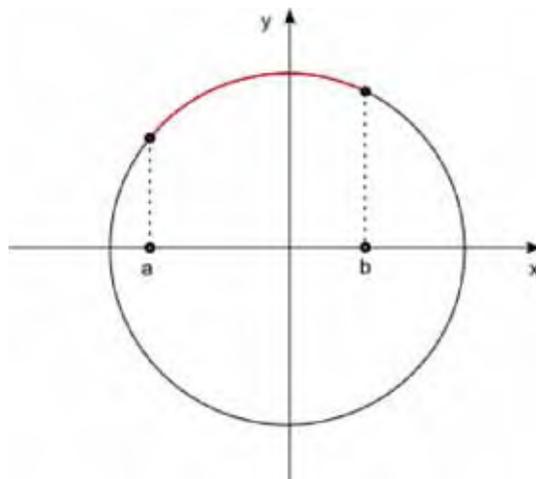


Abbildung 7: Der Kreisbogen von $x = a$ bis $x = b$

Es gilt also: Die Bogenlänge des Kreises (kartesische Darstellung) ist: $L(x) = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} + c$

Wir wissen, dass die Bogenlänge des halben Einheitskreises π ist. Damit können wir die Gültigkeit der Formel leicht bestätigen:

$$\arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi \quad \square$$

¹s. Anhang

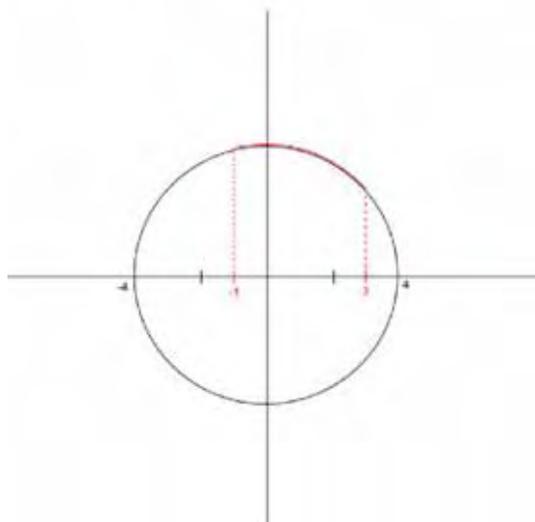
3.2 Polare Bogenlängenberechnung des Kreises

Da wir nun die Bogenlänge des halben Einheitskreises mit π bestätigt haben, können wir die polare Definition der Bogenlänge betrachten. Dazu bedienen wir uns Formel (II). Da der Radius r von φ unabhängig ist, ist $r(\varphi)$ konstant und $r'(\varphi) = 0$. Daraus folgt

$$L = \int \sqrt{0^2 + r^2} d\varphi = r \cdot \varphi + c$$

Diese Formel ist natürlich um einiges einfacher, aber fast genauso nutzlos, da wir zur Berechnung der Bogenlänge bereits gegebene Bogenlängen benötigen, dies hilft in den meisten Fällen allerdings kaum weiter. Sie liefert uns aber eine neue, integrale Auffassung des *Bogenmaßes*, weil wir jetzt wissen, dass die hergeleitete Bogenlänge mit dem in der Schule behandelten Bogenmaß übereinstimmt.

3.3 Der Kreis mit Radius 4



Gegeben sei der Kreis mit Radius 4 um den Ursprung. Wir suchen die Bogenlänge von $x=-1$ bis $x=3$. Dann ist die Bogenlänge auf diesem Intervall:

$$L_{-1}^3 = 4 \cdot \left(\arcsin \frac{3}{4} - \arcsin -\frac{1}{4} \right) \approx 4 \cdot (1,101) = 4,404 \approx 1,14\pi$$

Das Ergebnis erscheint logisch in Anbetracht der Tatsache, dass beim Kreis mit Radius 4 die halbe Bogenlänge 4π wäre. Der Kreis zwischen $x=-1$ bis $x=3$ ist also in etwa ein Drittel des oberen Halbkreises, was die Zeichnung nahelegt.

4 Die Bogenlänge der Ellipse

Bei der Bogenlängenberechnung der Ellipse werden wir schnell feststellen, dass wir mit schulischen Mitteln nicht weiterkommen. Deswegen und weil die nötigen Operationen sehr kompliziert sind, wurde ein Großteil der eigentlich nötigen Arbeitsschritte in den Anhang verlegt. Das Endergebnis wird hier im Hauptteil einfach aus der Literatur zitiert, im Anhang wird dasselbe Ergebnis aber auch hergeleitet.

4.1 Wiederholung: Die Ellipse

Geometrisch gesehen ist die Ellipse die Menge aller Punkte P , deren Summe der Abstände zu zwei festgelegten Punkten (den Brennpunkten) gleich ist. Anschaulich kann man sich das

so vorstellen, dass man eine ringförmig geschlossene Schnur um beide Brennpunkte legt und mit einem Bleistift unter Anspannung der Schnur eine Bahn abfährt (siehe Abb. 8).

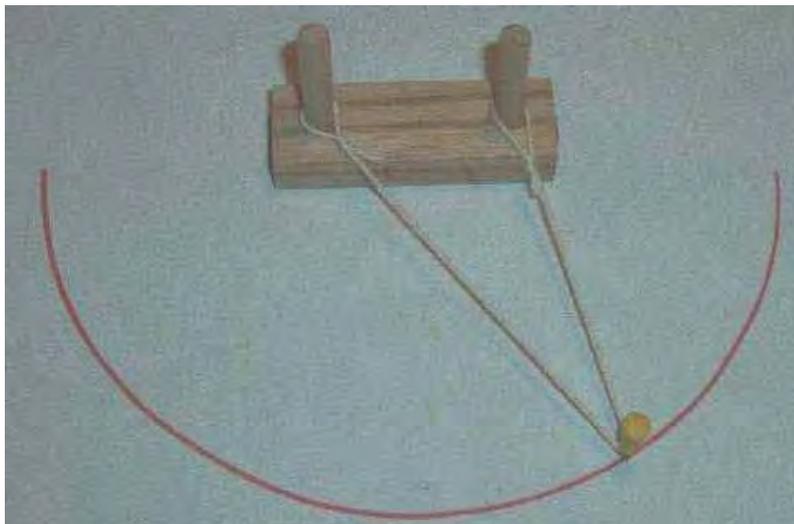


Abbildung 8: Gärtnerkonstruktion der Ellipse [G1]

Dies ergibt dann die Ellipse. Die große bzw. kleine Halbachse sind die Hälfte des längsten bzw. kürzesten Streckenstücks durch den Mittelpunkt (in der Mitte der beiden Brennpunkte) zum Ellipsenrand. Wir bezeichnen a und b als die Halbachsen der Ellipse mit $a > b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (siehe Abb. 9)

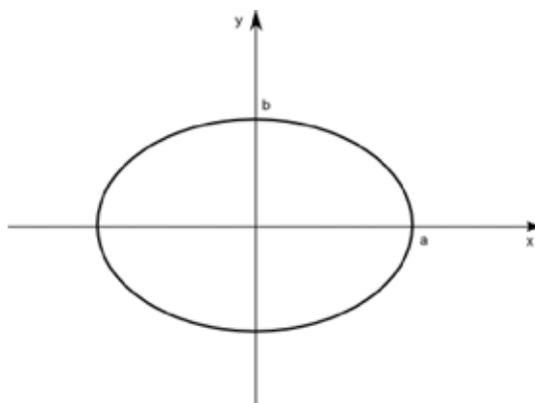


Abbildung 9: Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b

Am leichtesten lässt sich die Bogenlänge der Ellipse berechnen, wenn man sich ihrer parametrisierten Darstellung bedient.

Die Parametrisierung der Ellipse:

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t$$

$$dx = a \cos t \, dt, \quad dy = -b \sin t \, dt$$

Für $t = 0$ erhalten wir beispielsweise den höchsten Punkt der Ellipse, für $t = \pm \frac{\pi}{2}$ die beiden äußersten Punkte mit $x = \pm a$ (siehe Abb. 10). Diese Darstellung der Ellipse durch den Parameter, t , hat den Vorteil, dass wir nun zur Beschreibung der Punktmenge, die die Ellipse beschreibt, statt zwei Variablen x und y nur noch eine Variable t brauchen. Jedem Wert t ist genau ein Punkt der Ellipse zugeordnet, jedoch nicht umgekehrt: Der oberste Punkt der Ellipse kann mit $t = 0$, $t = 2\pi$, $t = 4\pi \dots$ gleichermaßen dargestellt werden. Für jeden Punkt gibt es unendlich viele Darstellungen (das kommt durch die Periodizität von

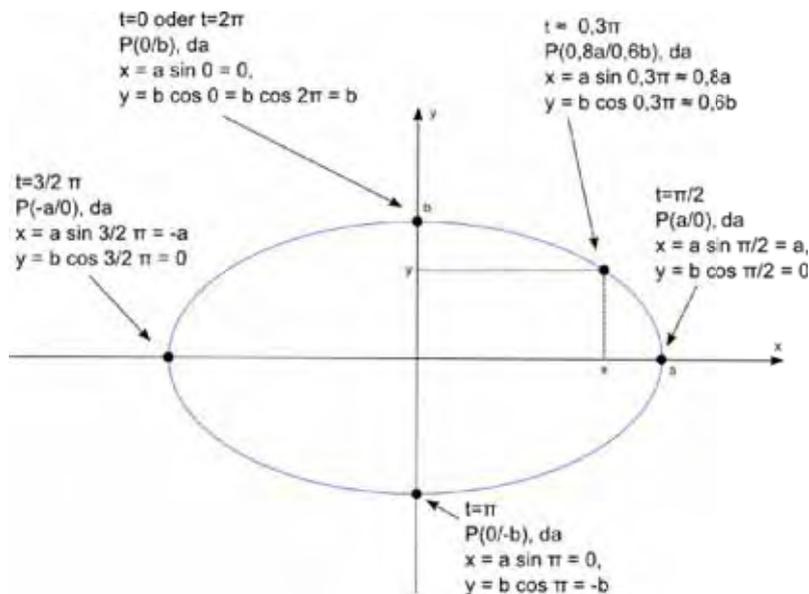


Abbildung 10: Veranschaulichung der Ellipsenparametrisierung

Sinus und Cosinus zustanden), wir benutzen daher nur Werte t aus $[0; 2\pi]$. Nach der Formel (III) setzen wir für die Bogenlänge:

$$\begin{aligned} L &= \int \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \cdot \int \sqrt{\cos^2 t + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Wir substituieren (ε wird übrigens „numerische Exzentrizität“ genannt und spiegelt die „Ellipsenhaftigkeit“ wieder: Je näher ε bei 1 liegt, desto größer ist a im Vergleich zu b , bei $\varepsilon = 1$ wird die Ellipse zur Parabel, einer Ellipse mit unendlich weit entferntem Brennpunkt)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}.$$

Umgestellt zu

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

folgt daraus:

$$\begin{aligned} L &= a \cdot \int \sqrt{\cos^2 t + (1 - \varepsilon^2) \sin^2 t} dt \\ &= a \cdot \int \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \cdot \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Dieses Integral nennt man *elliptisches Integral zweiter Art*. Es ist mit schulischen Mitteln nicht lösbar. Da eine Ausführung der Lösung den Horizont dieser Facharbeit übersteigen würde, werden wir das Kommende einfach überspringen und die Lösung dieses Integrals in der Literatur (siehe (1), (i3)) nachschlagen. Der Abschnitt, wie man auf die Lösung kommt, steht als eigenes Kapitel im Anhang, kann getrost ausgelassen werden und dient nur der Vollständigkeit.

4.2 Die Bogenlängenfunktion der Ellipse

a bezeichnet hier die große Halbachse

Näherung der Ordnung 1:

$$L_1^\circ = a \cdot 2\pi$$

Näherung der Ordnung 2:

$$L_2^\circ = a \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$$

Näherung der Ordnung 3:

$$L_3^\circ = a \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4\right)$$

Näherung der Ordnung 4:

$$L_4^\circ = a \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6\right)$$

Die erste große Überraschung hier ist, dass die Bogenlängenfunktion nur näherungsweise bestimmt werden kann und im Idealfall eine unendliche Summe ist. Die ersten 4 Näherungen sind oben angegeben. Das zweite Problem ist, dass damit keine Fragmente der Ellipse bestimmt werden können, sondern nur der gesamte Umfang der Ellipse. Dies kommt daher, dass obige Formel selber nur Vereinfachungen einer größeren Formel sind. Diese ursprünglichen Formeln werden hier aufgelistet:

Näherung der Ordnung 1:

$$L_1(t) = a \cdot t + c$$

Näherung der Ordnung 2:

$$L_2(t) = a \left[t + \frac{1}{4}\varepsilon^2(\sin t \cos t - t) \right] + c$$

Näherung der Ordnung 3:

$$L_3(t) = a \left[t + \frac{1}{4}\varepsilon^2(\sin t \cos t - t) + \frac{1}{64}\varepsilon^4(2 \sin^3 t \cos t + 3 \sin t \cos t - 3t) \right] + c$$

Näherung der Ordnung 4:

$$L_4(t) = a \left[t + \frac{1}{4}\varepsilon^2(\sin t \cos t - t) + \frac{1}{64}\varepsilon^4(2 \sin^3 t \cos t + 3 \sin t \cos t - 3t) \right] \\ + a \left[\frac{3}{2304}\varepsilon^6(8 \sin^5 t \cos t + 10 \sin^3 t \cos t + 15 \sin t \cos t - 15t) \right] + c$$

Im Gegensatz zu den Formeln für den gesamten Ellipsenumfang, welche nur eine Zahl widerspiegeln, sind das wieder Bogenlängenfunktionen. Das bedeutet: Wenn wir zwei Punkte P_1 und P_2 auf der Ellipse haben, die durch t_1 und t_2 , also durch die Koordinatenpaare $(x(t_1)/y(t_1))$ und $(x(t_2)/y(t_2))$ gegeben sind, lässt sich die Bogenlänge des Ellipsenfragments zwischen den Punkten (mit der n -ten Näherung) durch $|L_n(t_2) - L_n(t_1)|$ berechnen. (Der Betrag ist deswegen vonnöten, weil wir hier nicht sagen können, was größer ist, und eine negative Bogenlänge nur begrenzt Sinn ergibt.) Um zu sehen, wie schnell die Formel des Ellipsenumfangs (der erste Formeltyp in diesem Abschnitt) „konvergiert“ (der Beweis, dass die Reihe, die diese Formel erzeugt, konvergiert, wurde hier nicht geführt), folgt nun ein

4.3 Vergleich der Näherungen für den gesamten Ellipsenumfang

Wir betrachten nun eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 3$ und $b = 2$, $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{5}{9}$. Wir suchen die Maßzahl der Bogenlänge der Ellipse.

$$L_1^\circ = 6\pi \approx 18,84955592$$

$$L_2^\circ = \frac{31\pi}{6} \approx 16,23156204$$

$$L_3^\circ = \frac{1463\pi}{288} \approx 15,95885435$$

$$L_4^\circ = \frac{26209\pi}{5184} \approx 15,88310221$$

Auffallend ist, dass die Näherung mit steigender Komplexität schnell gegen einen bestimmten Wert zu konvergieren scheint (dies wäre die exakte Bogenlänge der Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2).

4.4 Die Bahn des Pluto

Zur Verifikation unserer Formel für die Bogenlänge für die Ellipse werden wir die Bogenlänge der Bahn des Plutos berechnen. Dieser umkreist, wie alle Planeten (Pluto ist strenggenommen nur ein sogenannter Zwergplanet) in unserem Sonnensystem, auf einer Ellipsenbahn die Sonne, wobei diese einen Brennpunkt bildet. Der Pluto eignet sich besonders gut, da er, etwa im Vergleich zu Erde, deren Bahn um die Sonne sehr kreisförmig ist, eine stark ausgeprägte Ellipsenkurve beschreibt. Wir werden zuerst mithilfe der bekannten Umlaufdauer um die Sonne und der mittleren Bahngeschwindigkeit die Bogenlänge auf physikalische Weise bestimmen und mit diesem Kontrollergebnis unsere Formel überprüfen. Über den Pluto ist Folgendes für uns Relevante bekannt (die Astronomische Einheit AE ist ungefähr gleich der großen Halbachse der Erdumlaufbahn: $1AE = 149597870691m$):

- Große Halbachse $a = 39,7AE$
- Numerische Exzentrizität $\varepsilon = 0,2522$
- Umlaufzeit um die Sonne $T = 247,68a = 7,8 \cdot 10^9s$
- Mittlere Orbitalgeschwindigkeit $\bar{v} = 4,72 \frac{km}{s}$

Damit ist die Umlaufbahn gegeben durch $U = T \cdot \bar{v} = 3,69 \cdot 10^{13}m = 246,4AE$. Dieses Ergebnis sollten wir, falls unsere Formel richtig ist, ebenfalls erhalten.

Wir bedienen uns der hergeleiteten Formel für die vierte Näherung der gesamten Ellipsenbahn, also

$$\begin{aligned} L_4^o &= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6\right) \\ &= 39,7AE \cdot 2\pi \left(1 - \frac{1}{4}(0,2522)^2 - \frac{3}{64}(0,2522)^4 - \frac{5}{256}(0,2522)^6\right) \\ &= 245,43 \dots AE \end{aligned}$$

Damit haben wir unsere Formel verifiziert. Dass wir einen Unterschied von etwa $1AE$ haben, ist vernachlässigbar, da wir einerseits nur mit der Näherung der Ordnung 4 gerechnet haben und andererseits selbst elementare Messwerte wie die große Halbachse des Pluto in verschiedenen Quellen nicht gleich sind.

5 Die Bogenlänge der Parabel

5.1 Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus

Für die Berechnung der Bogenlänge der Parabel benötigen wir die hyperbolischen trigonometrischen Funktionen, deren Herleitung nicht Teil des Schullehrplans ist. Es sei nur angemerkt, dass die Ähnlichkeit des Sinus Hyperbolicus mit dem gewöhnlichen Sinus nur durch beider komplexe Definition in Erscheinung tritt. Der hyperbolische Sinus hat außerdem keine geometrische Deutung wie der Sinus. Definiert wird der Sinus Hyperbolicus, der Cosinus Hyperbolicus und deren Umkehrfunktionen Areasinus Hyperbolicus und Areacosinus hyperbolicus

durch:

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \mathbb{D} &= [1; +\infty[\\ (\sinh x)' &= \cosh x \\ (\cosh x)' &= \sinh x \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen kann die Gültigkeit der im Folgenden benutzten Additionstheoreme etc. leicht nachgeprüft werden. Auf den ersten Blick scheinen die hyperbolischen Funktionen zu der Parabel keinerlei Verbindung zu haben. Wir bedienen uns aber ihrer Eigenschaften bei der Integralbildung. *Graphen der hyperbolischen Funktionen finden Sie im Anhang A.*

5.2 Herleitung der Bogenlänge der Parabel

Was wir im Abschnitt über die Translationsinvarianz gesagt hatten, wirkt sich hier günstig auf unsere Formel aus: Statt der normalen Gleichung $f_{\circ}(x) = ax^2 + bx + c$ können wir uns auf $f(x) = ax^2$ beschränken, weil b und c nur die Verschiebung des Graphen in Richtung der Koordinatenachsen beeinflussen, was wir außer Acht lassen können, da wir jede Parabelgleichung der Form f_{\circ} in die Form f umrechnen können, welche die gleich Bogenlänge hat. Gegeben sei die Parabel (siehe Abb. 11) also durch

$$f(x) = ax^2$$

Dann ist die Bogenlänge nach Formel (I):

$$L = \int \sqrt{1 + 4a^2x^2} \, dx$$

Nun substituieren wir: $2ax = \sinh t$; $dx = \frac{1}{2a} \cosh t \, dt$.

Machen Sie sich keine Gedanken darüber, warum wir das tun: Es funktioniert. Wer Verständnisprobleme mit dem Sinus Hyperbolicus hat, denke sich die Substitution einfach als $2ax = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, denn dies ist einfach die Definition des Sinus Hyperbolicus. Im Anhang werden wir noch ein paar Eigenschaften dieser Funktion besprechen.

$$L = \int \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cdot \frac{1}{2a} \cdot \cosh t \cdot dt$$

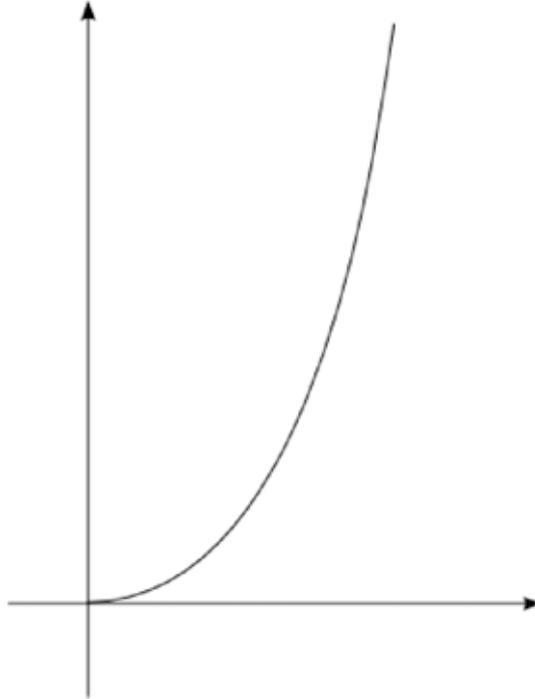


Abbildung 11: Die Parabel $f(x) = ax^2$

Mit der Formel $1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$ (2)

$$\frac{1}{2a} \int \sqrt{\cosh^2 t} \cdot \cosh t \cdot dt = \frac{1}{2a} \int \cosh^2 t \cdot dt$$

Und weiterhin $\cosh^2 t = \frac{\cosh(2t)+1}{2}$ (3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \int \frac{\cosh(2t) + 1}{2} \cdot dt &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{\cosh(2t)}{2} dt + \int \frac{1}{2} dt \right) \\ &= \frac{1}{4a} t + \frac{1}{8a} \cdot \sinh(2t) + \tilde{c} \\ \text{(Resubstituieren)} &= \frac{1}{4a} \operatorname{arsinh}(2ax) + \frac{1}{8a} \sinh(2 \cdot \operatorname{arsinh}(2ax)) + c \end{aligned}$$

Weitere Umformung: $\sinh(2u) = 2 \sinh u \cosh u$ (4)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4a} \operatorname{arsinh}(2ax) + \frac{1}{4a} \sinh(\operatorname{arsinh}(2ax)) \cosh(\operatorname{arsinh}(2ax)) + c \\ &\quad \text{mit } \cosh(u) = \sqrt{1 + \sinh^2(u)}: \\ &= \frac{1}{4a} \operatorname{arsinh}(2ax) + \frac{1}{4a} \sinh(\operatorname{arsinh}(2ax)) \sqrt{1 + (\sinh(\operatorname{arsinh}(2ax)))^2} + c \\ &\quad \text{und } \sinh(\operatorname{arsinh}(u)) = u: \\ &= \frac{1}{4a} \operatorname{arsinh}(2ax) + \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + c \quad \text{mit } \operatorname{arsinh}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \end{aligned}$$

Damit ist die Bogenlängenfunktion der Parabel bestimmt durch :

$$L(x) = \frac{1}{4a} \ln(2ax + \sqrt{1 + 4a^2 x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4a^2 x^2} + c$$

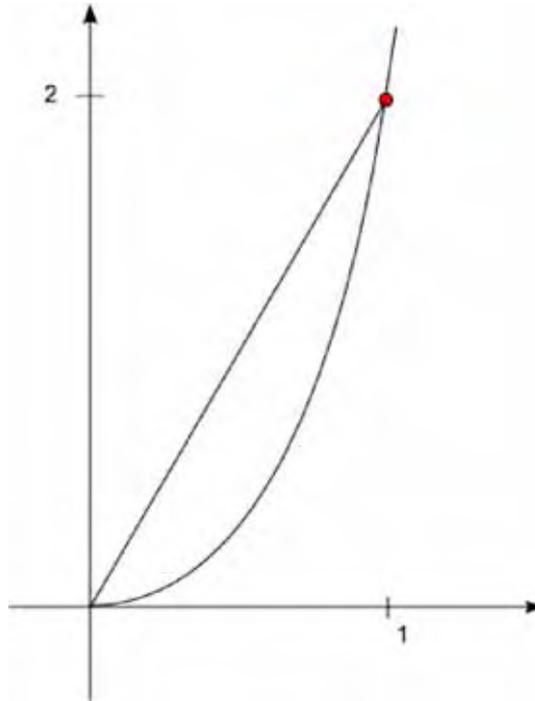
²s. Anhang

³s. Anhang

⁴s. Anhang

5.3 Die Bogenlänge der Parabel $2x^2$

Wir berechnen das Bogenstück der Parabel $f(x) = 2x^2$ von $x=0$ bis $x=1$. Eine Bedingung, welche wir aus der Abbildung herauslesen können, ist die, dass die Bogenlänge auf jeden Fall größer ist als die Länge des Geradenstücks, das auch eingezeichnet ist. Dieses hat die Länge $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Es muss also gelten: $L_0^1 > \sqrt{5} \approx 2.24$.



$$\begin{aligned} a &= 2 \\ L_0^1 &= L(1) - L(0) \\ L(1) &= \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{1+16}) + \frac{1}{2} \sqrt{1+16} \\ &= \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2} \sqrt{17} \\ &\approx 2,32 \\ L(0) &= \frac{1}{8} \ln(0+1) + 0 \\ &= 0 \\ \Rightarrow L_0^1 &= \frac{1}{8} \ln(4 + \sqrt{17}) + \frac{1}{2} \sqrt{17} \approx 2,32 > 2.24 \end{aligned}$$

6 Zusammenfassung

Als kurze Zusammenfassung soll dieser Abschnitt dienen.

Wir hatten drei verschiedene Formeln zur Bogenlängenberechnung hergeleitet:

- bei Funktionen in kartesischer Form: $L = \int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- bei Funktionen in polarer Form: $L = \int \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$
- bei parametrisierten Kurven: $L = \int \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$

Mit ihrer Hilfe betrachteten wir hauptsächlich drei Spezialfälle:

- die Bogenlänge des (Halb-)Kreises $y = r^2 - x^2$:

$$L = r \cdot \arcsin \frac{x}{r} + c$$

- die Bogenlänge der Ellipse $x(t) = a \sin t$; $y = b \cos t$:

$$L = a \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 \dots\right) + c$$

- die Bogenlänge der Parabel $y = ax^2$:

$$L = \frac{1}{4a} \ln(2ax + \sqrt{1 + 4a^2x^2}) + \frac{1}{2}x\sqrt{1 + 4a^2x^2} + c$$

A Hyperbolische Funktionen

Die hyperbolisch trigonometrischen Funktionen \sinh , \cosh , arsinh und arcosh sind, wie schon in Kapitel 2.5 besprochen, wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) & \mathbb{D} &= \mathbb{R} \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) & \mathbb{D} &= [1; +\infty[\\ (\sinh x)' &= \cosh x \\ (\cosh x)' &= \sinh x\end{aligned}$$

Ihre Graphen sehen folgendermaßen aus:

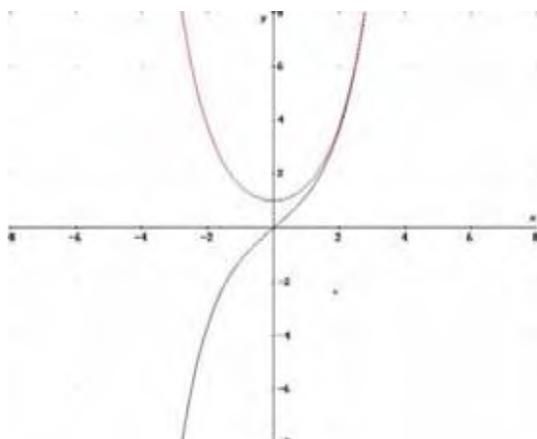


Abbildung 12: Sinus Hyperbolicus (schwarz) und Cosinus Hyperbolicus (rot)

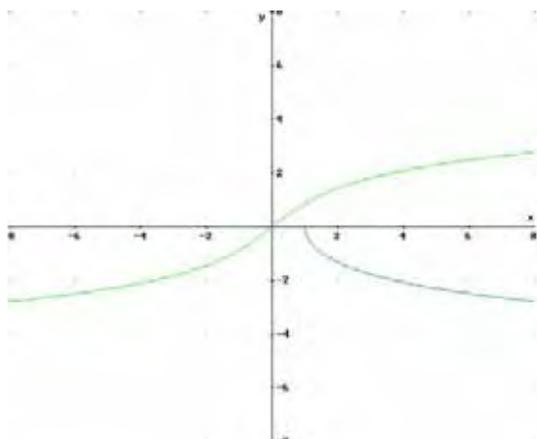


Abbildung 13: Areasinus Hyperbolicus (grün) und Areacosinus Hyperbolicus (blau)

Eine Anwendung des hyperbolischen Sinus'/Cosinus': Wenn man eine Kette oder Schnur an ihren Enden befestigt und das Mittelstück frei herabhängen lässt, bildet sich im Idealfall genau die Kurve des Cosinus Hyperbolicus (und nicht, wie oft behauptet, eine Parabel, dabei werden die in der Kette wirkenden Kohäsionskräfte außer Acht gelassen). Das bedeutet, dass man die Länge des benötigten Drahtseils zum Bau einer Hängebrücke mit der Bogenlänge des Cosinus Hyperbolicus berechnen kann. (Und diese Länge hängt überraschenderweise mit dem Sinus Hyperbolicus zusammen)

B Beweise

B.1 Die Rekursionsformel zur Integration

Wenn die Behauptung

$$\int \sin^n t \, dt = -\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} t \cdot \cos t + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} t \, dt$$

stimmt, so muss gelten:

$$\sin^n t \, dt = \underbrace{\left[-\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} t \cdot \cos t + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} t \, dt \right]'}_{(A)}$$

$$\begin{aligned} (A) &= -\frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \cdot \cos t \cdot \cos t + \left(-\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} t \right) \cdot (-\sin t) + \frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \\ &= -\frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \cdot \cos^2 t + \left(-\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} t \right) \cdot (-\sin t) + \frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \\ \cos^2 t &\stackrel{=}{=} 1 - \sin^2 t & -\frac{n-1}{n} \sin^{n-2} t \cdot (1 - \sin^2 t) + \frac{1}{n} \sin^n t + \frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \\ &= -\frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t + \frac{n-1}{n} \cdot \sin^n t + \frac{1}{n} \cdot \sin^n t + \frac{n-1}{n} \cdot \sin^{n-2} t \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \sin^n t + \frac{1}{n} \cdot \sin^n t = \sin^n t \quad \square \end{aligned}$$

B.2 Umformung für den Sinus

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

Beweis: Wenn diese Umformung für jegliches $u \in \mathbb{R}$ gilt, so müssen wir beweisen, dass 1) $\sin^2 u + \cos^2 u$ konstant ist und 2) den Wert 1 annimmt.

1):

$$\frac{d(\sin^2 u + \cos^2 u)}{du} = 2 \sin u \cdot \cos u + 2 \cos u \cdot (-\sin u) = 0$$

$$\Rightarrow \sin^2 u + \cos^2 u \text{ konstant}$$

2):

$$u \text{ sei } 0: \quad \sin^2 u + \cos^2 u = 0^2 + 1^2 = 1$$

Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

B.3 Umformung für den Sinus Hyperbolicus (I)

Zu beweisen ist:

$$1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

Beweis: Wir bedienen uns der Definition der beiden Funktionen:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
 1 + \sinh^2 x &= 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 \\
 &= \cosh^2 x
 \end{aligned}$$

B.4 Umformung für den Sinus Hyperbolicus (II)

In Kapitel 2.5 wird folgende Formel verwendet:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

Wir gehen von der exponentiellen Definition des Sinus Hyperbolicus aus:

$$\begin{aligned}
 \sinh(2x) &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \stackrel{\text{3. Binom}}{=} 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= 2 \sinh x \cosh x
 \end{aligned}$$

B.5 Umformung für den Cosinus Hyperbolicus

Zu zeigen:

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh(2x) + 1}{2}$$

Mit der Definition des Cosinus Hyperbolicus gilt:

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
 &= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1}{2} \\
 &= \frac{\cosh^2(2x) + 1}{2}
 \end{aligned}$$

C Die Bogenlänge der Ellipse (ausführliche Herleitung)

Dieser Abschnitt ist der komplexeste dieser Abhandlung und geht über den in der Schule behandelten Unterrichtsstoff hinaus. Bei der Berechnung der Bogenlänge der Ellipse stoßen wir auf die sogenannten elliptischen Integrale, die analytisch nicht lösbar sind. Da dieser Abschnitt sehr umfassend ist, wird das Verfahren zur Bestimmung der Bogenlänge der Ellipse hier in 8 Abschnitte gegliedert:

- **Punkt 1:** Aufstellen der allgemeinen Bogenlängenformel für die Ellipse nach hergeleiteter Formel III. (Kapitel 2.2.3). Dabei entsteht ein Problem: analytisch (d. h. mit den gewöhnlichen Integrationsmethoden) nicht lösbares Integral („elliptisches Integral“) taucht auf
- **Punkt 2:** Exkurs: Vorstellung eines Hilfsmittels zur Vereinfachung des elliptischen Integrals: „MacLaurinsche Reihe“
- **Punkt 3:** Anwendung des Hilfsmittels auf das Integral
- **Punkt 4:** Hier erhalten wir eine neue Formel und ein neues Problem: Die Lösung von geradzahlig potenzierten Sinus-Integralen, also Integralen der Form $\int \sin^{2k}(t) dt$. Davon abgesehen ist das elliptische Integral für uns aber kein Problem mehr.

- **Punkt 5:** Lösen des Integrals über geradzahlig potenzierten Sinus mithilfe einer Rekursionsformel („schrittweise Formel“)
- **Punkt 6:** Einführung einer aus der Rekursionsformel resultierenden, für alle k allgemeingültigen, Formel für die Sinusintegrale (ohne Herleitung)
- **Punkt 7:** Aufstellen des allgemeinen Terms der Bogenlänge von beliebig gewählten Ellipsensegmenten aus den bisherigen Ergebnissen
- **Punkt 8:** deutliche Vereinfachung der Formel aus Punkt 9 durch den Spezialfall: Bogenlängenberechnung des gesamten Ellipsenbogens statt willkürlich gewählten Teilen, dadurch aber auch Einschränkung

Wir beginnen mit **Punkt 1**:

Aus Kapitel 1.5 wissen wir:

$$L = a \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt$$

Wie bereits erwähnt, ist das ein elliptisches Integral, welches nicht mit normalen Integrationsmethoden lösbar ist. Im nächsten Abschnitt wird ein Werkzeug eingeführt, welches uns dabei helfen wird, dieses Integral zu knacken.

C.1 Exkurs: MacLaurinsche Reihe

Punkt 2:

Die *MacLaurinsche Reihe* ist eine Sonderform der *Taylorreihe*. Sie bietet eine Hilfe zur Approximation von Funktionen durch eine sogenannte Reihenentwicklung. Eine *Reihe* ist die Summe von aufeinanderfolgenden Elementen einer *Folge*. Eine Folge wiederum ist eine Abbildung der Form $\mathbb{N} \rightarrow K$ (K : in der Analysis meist reelle Zahlen oder Funktionen, kann aber auch aus völlig abwegigen Konstrukten bestehen). Die Approximation einer Funktion f mithilfe der MacLaurinschen Reihe ist folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k}_{\text{MacLaurinsche Reihe}} = \underbrace{f(0)}_{k=0} + \underbrace{f'(0) \cdot x}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6} f'''(0) \cdot x^3}_{k=3}$$

Die Herleitung oder der Beweis der MacLaurinschen Reihe würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, und so werden wir nur auf einige Beispiele eingehen:

Bsp. 1: $\hat{f}(x) = x^2$

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2 + 0 + 0 + \dots = x^2 = \hat{g}(x) \quad \square$$

Bsp. 2: $\hat{g}(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 + x + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot x^2 + (-1) \cdot \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} \cdot 0 \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \dots \\ &= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 \mp \dots \end{aligned}$$

Hier lässt sich nicht sofort einsehen, dass diese Reihenentwicklung stimmt, ein Blick auf den Graphenplotter (siehe Abb. 14) zeigt jedoch, dass in einem engen Bereich bereits die Näherung mit 3 Summanden recht gut stimmt.

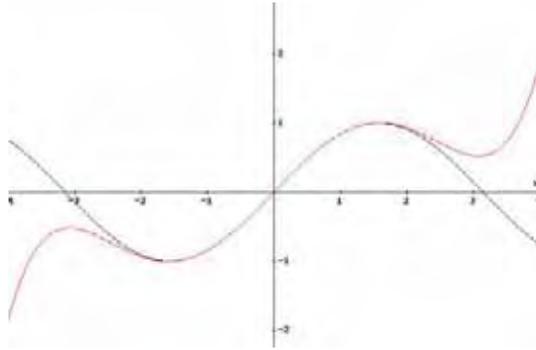


Abbildung 14: grau: Sinuskurve, rot: Näherung mith. MacLaurinscher Reihe

Für unser spezielles Problem benutzen wir $f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ (Wenn wir $x = \varepsilon^2 \sin^2 t$ setzen, erhalten wir den Integranden der ursprüngliche Formel für die Bogenlänge der Ellipse. Was das bringt, werden wir später sehen)

Die Ableitungen von $f(x)$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1-x)^{\frac{1}{2}} \\
 f'(x) &= -\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} \\
 f''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-2} = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\
 f'''(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-3} = -\frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \\
 f^{(4)}(x) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-4} = -\frac{15}{16}(1-x)^{-\frac{7}{2}} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich $f(x)$ folgendermaßen entwickeln:

$$\begin{aligned}
 f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{-\frac{1}{4}}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{-\frac{1 \cdot 3}{8}}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{16}}{4!}\right)x^4 \\
 &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots
 \end{aligned}$$

Wir erkennen hier recht schnell das Muster: Beim k -ten Summanden (1 ist der 0-te Summand, wir nummerieren die Summanden entsprechend ihrer Potenz über x) steht im Zähler des Bruches das Produkt der ersten $k-1$ ungeraden natürlichen Zahlen; im Nenner die ersten k geraden natürlichen Zahlen. Wir suchen also eine Formel, um den Bruch des k -ten Summanden allgemein darzustellen. Wir benötigen dazu:

- Eine Formel 1 für das Produkt der ersten k geraden Zahlen und
- Eine Formel 2 für das Produkt der ersten $k-1$ ungeraden Zahlen.

Dann können wir einen Bruch der Form $\frac{\text{Formel 2}}{\text{Formel 1}}$ bilden und erhalten damit den Faktor beim k -ten Summanden, den wir ja suchen. Wir betrachten zuerst das Produkt der ersten k geraden Zahlen:

$$\begin{aligned}
 2 &= 2 \\
 2 \cdot 4 &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \\
 2 \cdot 4 \cdot 6 &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\
 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 &= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \\
 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k &= 2^k \cdot k!
 \end{aligned}$$

Produkt der ersten k geraden Zahlen, **Formel 1**

Nun das Produkt der ersten m ungeraden Zahlen: Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für das Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2m$: Das Produkt hat m gerade und m ungerade Faktoren. So erhalten wir mit Formel 1 das Produkt aller m ungeraden Zahlen:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 2m = \frac{(2m)!}{2^m \cdot m!}$$

Produkt der ersten m ungeraden Zahlen, **Formel 2**

Doch erinnern wir uns, was wir ursprünglich wollten: Für die Entwicklung von $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ mithilfe der MacLaurinschen Reihe suchten wir nach einer allgemeinen Beschreibung des k -ten Glieds. Wir bezeichnen das k -te Glied mit G_k . Dann gilt:

$$\begin{aligned} G_k &= \frac{\text{Formel 2}}{\text{Formel 1}} \\ &= \frac{\frac{(2(k-1))!}{2^{k-1} \cdot (k-1)!}}{2^k \cdot k!} \\ &= \frac{(2k-2)!}{2^{k-1} \cdot 2^k \cdot (k-1)! \cdot k!} \\ &= \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} \cdot (k-1)! \cdot k!} \end{aligned}$$

Auch wenn die Menge der Fakultäten ein wenig ungewohnt erscheinen mag, ist G_k doch nur eine von k abhängige Zahl. Trotzdem ein paar Beispiele, um die Scheu vor der umfangreichen Formel zu nehmen (Erinnern wir uns: $0! = 1! = 1$):

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{0!}{2^1 \cdot 0! \cdot 1!} = \frac{1}{2} \\ G_2 &= \frac{2!}{2^3 \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{1}{2 \cdot 4} \\ G_3 &= \frac{4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \\ G_4 &= \frac{6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \end{aligned}$$

Dies haben wir nun gegeben und wir aktualisieren unsere Formel:

$$\begin{aligned} f(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{-\frac{1}{4}}{2!}\right)x^2 + \left(\frac{-\frac{1 \cdot 3}{8}}{3!}\right)x^3 + \left(\frac{-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{16}}{4!}\right)x^4 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 - \dots \\ &= -\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} \cdot (k-1)! \cdot k!} \cdot x^k \dots \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Möglichkeit gefunden, die Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{1-x}$$

als eine unendliche Summe von Vielfachen von x^n ; $n \in \mathbb{N}_0^+$, also als unendliche Polynome darzustellen. Doch welchen Zweck könnte dies haben? Die Antwort ist recht trivial: Die durch die Reihenentwicklung entstehende Summe lässt sich erheblich einfacher integrieren als die komplizierte Wurzelfunktion. Wenn wir nun eine Möglichkeit finden, den Integranden des elliptischen Integrals (welcher eine besondere Wurzelfunktion ist), mithilfe der Reihenentwicklung in eine ebensolche Summe zu verwandeln, sind wir ein großes Stück weiter! Damit ist der Exkurs beendet.

C.2 Anwendung der MacLaurinschen Reihe auf das elliptische Integral

Doch besinnen wir uns nun darauf zurück, was uns eigentlich beschäftigt hat: Wir suchten nach einer Lösung für das Integral

$$L = a \cdot \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

Wenn wir nun $x = \varepsilon^2 \sin^2 t$ setzen, haben wir genau die Funktion, deren Reihenentwicklung wir soeben aufgestellt haben. Resubstituieren wir nun, so können wir schreiben:

Punkt 3

$$\underbrace{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}}_{\text{Integrand des elliptischen Integrals}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \sin^2 t - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \varepsilon^4 \sin^4 t - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \varepsilon^6 \sin^6 t - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \varepsilon^8 \sin^8 t - \dots - \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} (k-1)! k!} \cdot \varepsilon^{2k} \sin^{2k}(t) - \dots$$

Unser elliptisches Integral lässt sich also darstellen als:

$$\begin{aligned} L &= a \cdot \int \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \left[\int 1 dt - \int \frac{1}{2} \cdot \varepsilon^2 \sin^2 t dt \right] \\ &\quad - a \left[\int \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \varepsilon^4 \sin^4 t dt \right] \\ &\quad - a \left[\int \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \varepsilon^6 \sin^6 t dt \right] \\ &\quad - a \left[\int \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \varepsilon^8 \sin^8 t dt - \dots \right] \\ &\quad - a \left[\int \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1} \cdot (k-1)! \cdot k!} \cdot \varepsilon^{2k} \sin^{2k} t dt - \dots \right] \\ &= a \left[t - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} \cdot G_k \cdot \int \sin^{2k}(t) dt \right] \end{aligned}$$

Punkt 4

Die konstanten Faktoren (der Bruch und die Potenzen von ε) kann man vor das jeweilige Integral ziehen (wie im Schritt auf die letzte Zeile so gemacht), sodass die Lösung des Gesamtterms nur noch auf das Problem zurückgeführt wird, Sinusfunktionen mit gerader Potenz zu integrieren ($\int \sin^2 t dt$, $\int \sin^4 t dt$, \dots). Erinnern wir uns: a , ε und G_k sind nur ganz normale reelle Zahlen, das einzige Unbekannte ist also wirklich nur das Integral. Doch wie lösen wir Integrale über den geradzahlig potenzierten Sinus?

C.3 Rekursionsformel zur Integrationshilfe

Punkt 5

Wir bedienen uns folgender Rekursionsformel⁵:

$$\int \sin^n t dt = -\frac{1}{n} \cdot \sin^{n-1} t \cdot \cos t + \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2} t dt$$

Dies bedeutet: Man startet mit $\int \sin^0 t dt = \int dt = t$, schließt davon auf $\int \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} \cdot \sin(t) \cos(t) + \frac{1}{2} \cdot t$ und so weiter. Damit erreicht man sämtliche Integrale

$$\int \sin^{2n}(t) dt; \quad n \in \mathbb{N}_0^+$$

Die Herleitung lassen wir wieder aus, lediglich beweisen werden wir die Rekursionsformel im Anhang.

⁵Die Rekursionsformel funktioniert hier so, dass man versucht, ein Problem auf ein bereits gelöstes zurückzuführen. Was dies bedeutet, werden wir gleich sehen. Die Formel wird außerdem in A.1. bewiesen.

$$\begin{aligned}
\int \sin^0 t \, dt &= t \\
\int \sin^2 t \, dt &= -\frac{1}{2} \sin t \cos t + \overbrace{\frac{1}{2} t}^{\frac{2-1}{2} \cdot \int \sin^0 t \, dt} \\
\int \sin^4 t \, dt &= -\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \overbrace{\frac{3}{8} \sin t \cos t + \frac{3}{8} t}^{\frac{4-1}{3} \cdot \int \sin^2 t \, dt} \\
\int \sin^6 t \, dt &= -\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \overbrace{\frac{5}{24} \sin^3 t \cos t - \frac{5}{16} \sin t \cos t + \frac{5}{16} t}^{\frac{6-1}{6} \cdot \int \sin^4 t \, dt} \\
\int \sin^8 t \, dt &= -\frac{1}{8} \sin^7 t \cos t - \overbrace{\frac{7}{48} \sin^5 t \cos t - \frac{35}{192} \sin^3 t \cos t + \frac{35}{128} \sin t \cos t + \frac{35}{128} t}^{\frac{8-1}{8} \cdot \int \sin^6 t \, dt}
\end{aligned}$$

Wie man sehen kann, würde man für $k=10$ schon 10 Vorberechnungen benötigen. Diese Art der Berechnung von geradzahlig potenzierten Sinus-Integralen ist sehr gefährlich, weil ein einziger Fehler in der Kette von Rechnungen das Ergebnis zerstört. Desweiteren gibt es noch ein Manko: In einer Formel, in der solche Sinusintegrale auftauchen, lässt sich mit einer Rekursionsformel nur schlecht ein allgemeiner Term ausdrücken (weil diese nur auf das vorhergehende Element verweist). Zuletzt ist diese Methode sehr aufwendig, viel praktischer wäre es, wenn wir eine „Universalformel“ für ein beliebiges k hätten, ohne vorher alle Vorgänger berechnen zu müssen. Eine solche Formel folgt hier gleich. Die Herleitung ist allerdings sehr zeitraubend und umfangreich und wird daher ausgelassen (die Methode beruht auf Koeffizientenvergleich, die Anregung dazu bekam ich in (i4)). Präsentiert wird nur das Endergebnis der Überlegungen. Benötigt wird für die Formel außerdem folgender Term (genauso wie G_k nur eine von Parametern abhängige Zahl, wenn sie auch sehr kompliziert aussieht; das $2k$ und das $2k-1$ steht für die k -te gerade bzw. ungerade Zahl, dass wir das brauchen, beruht darauf, dass bei der Integralbildung immer nach einem bestimmten Muster gerade und ungerade Exponenten auftauchen)

$$T_{2k}(2j-1) := -2^{2 \cdot (k-j+1)} \cdot \frac{(j-1)!^2 \cdot (2k)!}{k!^2 \cdot (2j-1)!}$$

Und hier der allgemeine Term für Integrale des Sinus mit geraden Potenzen: **Punkt 6**

$$\int \sin^{2k} t \, dt = -t \cdot T_{2k}(1) + \sum_{j=1}^k T_{2k}(2j-1) \cdot \sin^{2j-1}(t) \cdot \cos(t)$$

Wem diese Formel nicht behagt, der kann natürlich auch die Rekursionsformel benutzen, um auf das selbe Ergebnis zu kommen, er muss allerdings die vorher genannten Nachteile in Kauf nehmen.

Zwei Beispiele zum „Gewöhnen“:

$k=1$:

$$T_2(1) = -2^{-2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(t) \, dt &= -t \cdot T_2(1) + \sum_{j=1}^1 T_2(2j-1) \cdot \sin^{2j-1}(t) \cos(t) \\
&= \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin(t) \cos(t)
\end{aligned}$$

k=2:

$$T_4(1) = -2^{-4} \cdot \frac{1 \cdot 4!}{4 \cdot 1!} = -\frac{3}{8}$$

$$T_4(3) = -2^{-2} \cdot \frac{14!}{2!^2 \cdot 3!} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4(t) dt &= -t \cdot T_4(1) + \sum_{j=1}^k T_4(2j-1) \cdot \sin^{2j-1}(t) \cdot \cos(t) \\ &= \frac{3}{8}t - \frac{3}{8} \sin(t) \cos(t) - \frac{1}{4} \sin^3(t) \cos(t) \end{aligned}$$

Dies ist identisch mit den bereits vorher berechneten Werten, unsere Formel scheint also zu funktionieren. Dem Leser sei es überlassen, weitere Werte auszuprobieren.

C.4 Die allgemeine Formel für die Länge von Ellipsensegmenten

Punkt 7

Nun lässt sich mithilfe der Rekursionsformel (oder deren äquivalenten Erweiterung, der Formel für allgemeine k) und der Reihenentwicklung des elliptischen Integrals eine beliebig genaue Näherung erstellen.

Näherung der Ordnung 1:

$$\begin{aligned} L_1 &= a \int dt \\ &= a \cdot t + c \end{aligned}$$

Näherung der Ordnung 2:

$$\begin{aligned} L_2 &= a \left[\int dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int \sin^2 t dt \right] \\ &= a \left[t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right) \right] \\ &= a \left[t + \frac{1}{4} \varepsilon^2 (\sin t \cos t - t) \right] + c \end{aligned}$$

Näherung der Ordnung 3:

$$\begin{aligned} L_3 &= a \left[\int dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int \sin^2 t dt - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int \sin^4 t dt \right] \\ &= a \left[t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right) - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \frac{3}{8} \sin t \cos t + \frac{3}{8} t \right) \right] \\ &= a \left[t + \frac{1}{4} \varepsilon^2 (\sin t \cos t - t) + \frac{1}{64} \varepsilon^4 (2 \sin^3 t \cos t + 3 \sin t \cos t - 3t) \right] + c \end{aligned}$$

Näherung der Ordnung 4:

$$\begin{aligned} L_4 &= a \left[\int dt - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int \sin^2 t dt - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \int \sin^4 t dt - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \int \sin^6 t dt \right] \\ &= a \left[t - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \sin t \cos t + \frac{1}{2} t \right) - \frac{1}{2 \cdot 4} \varepsilon^4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \sin^3 t \cos t - \frac{3}{8} \sin t \cos t + \frac{3}{8} t \right) \right] \\ &\quad + a \left[-\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon^6 \cdot \left(-\frac{1}{6} \sin^5 t \cos t - \frac{5}{24} \sin^3 t \cos t - \frac{5}{16} \sin t \cos t + \frac{5}{16} t \right) \right] \\ &= a \left[t + \frac{1}{4} \varepsilon^2 (\sin t \cos t - t) + \frac{1}{64} \varepsilon^4 (2 \sin^3 t \cos t + 3 \sin t \cos t - 3t) \right] \\ &\quad + a \left[\frac{3}{2304} \varepsilon^6 (8 \sin^5 t \cos t + 10 \sin^3 t \cos t + 15 \sin t \cos t - 15t) \right] + c \end{aligned}$$

Näherung der Ordnung n:

$$L_n = a \left[t - \sum_{k=1}^{n-1} G_k \cdot \varepsilon^{2k} \int \sin^{2k}(t) dt \right]$$

Hier sollten die oben hergeleiteten Terme für $\int \sin^{2k}(t) dt$ und G_k berechnet und eingesetzt werden, das unterlassen wir hier jedoch, weil die exakte Form sehr unanschaulich wird. Das wäre dann eine Sache für den Computer. Nun nehmen wir eine Vereinfachung vor: Wir nehmen an, wir wollten die Bogenlänge der Ellipse im ersten und vierten Quadranten berechnen. In unsere Bogenlängenfunktion müssen wir dann (nach unserer Parametrisierung) die Grenzen π und 0 einsetzen. Der Wert der Bogenlänge in diesen beiden Quadranten wäre dann $L(\pi) - L(0)$. Für $t = \pi$ wird $\sin t = 0$, für $t = 0$ ebenso. Das bedeutet, für die gewählten Grenzen verschwinden die trigonometrischen Funktionen in unseren Näherungstermen (dies lässt sich leicht aus der allgemeinen Formel für $\int \sin^{2k}(t) dt$ herausgelesen werden, wenn man für $t = 0$ einsetzt. Wenn wir nun auf die gesamte Bogenlänge schließen wollen, müssen wir nur mit 2 multiplizieren (für die restlichen zwei Quadranten). Damit erhalten wir die komplette Bogenlänge der Ellipse, die wir von nun an mit L_n° bezeichnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} L_n^\circ &= 2 \cdot (L_n(\pi) - L_n(0)) = 2 \cdot (L_n(\pi) - (a [0 - 0])) \\ L_n^\circ &= 2 \cdot L_n(\pi) \end{aligned}$$

Und, ausgehend von L_n , die Näherung der Ordnung n:

$$\begin{aligned} L_n^\circ &= a \cdot 2 \left[\pi - \sum_{k=1}^{n-1} \left(G_k \cdot \varepsilon^{2k} \cdot \left(-T_{2k}(1) \cdot \pi + \underbrace{\sum_{i=1}^k T_{2k}(2i-1) \cdot \sin^{2i-1}(\pi) \cos(\pi)}_{=0} \right) \right) \right] \\ &= a \cdot 2 \cdot \pi \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \cdot \varepsilon^{2k} \cdot T_{2k}(1) \right] \\ &= a \cdot 2 \cdot \pi \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} G_k \cdot \varepsilon^{2k} \cdot -2^{-2k} \cdot \frac{(2k)!}{k!2} \right] \quad ; G_k = \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!k!} \\ &= a \cdot 2 \cdot \pi \left[1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-2)!(2k!)}{2^{4k-1}(k-1)!k!^3} \cdot \varepsilon^{2k} \right] \end{aligned}$$

Zum Schluss noch einige Beispiele, die uns helfen sollen, die Formel zu verstehen:

n=1:

Hier ist die Summe nicht definiert (k würde von 1 bis 0 gehen), sie ist also =0. Damit:

$$L_1^\circ = a \cdot 2(\pi - 0) = 2a\pi$$

n=2:

$$\begin{aligned} L_2^\circ &= a \cdot 2\pi \left[1 - \frac{0! \cdot 2!}{2^3 \cdot 0! \cdot 1!^3} \cdot \varepsilon^2 \right] \\ &= a \cdot 2\pi \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right] \end{aligned}$$

n=3:

$$\begin{aligned} L_3^\circ &= a \cdot 2\pi \left[1 - \frac{(0!) \cdot (2!)}{2^3 \cdot (0!) \cdot (1!)^3} \cdot \varepsilon^2 - \frac{2! \cdot 4!}{2^7 \cdot 1! \cdot 2!^3} \varepsilon^4 \right] \\ &= a \cdot 2\pi \left[1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{3}{64} \varepsilon^4 \right] \end{aligned}$$

Dies erhärtet die Glaubwürdigkeit unserer n-Formel.

D Literaturnachweis

Verwendet wurde bei der Recherche folgende Literatur:

- (1) Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*, 6. Auflage, Verlag Harri Deutsch
speziell der Abschnitt zur Bogenlänge der Ellipse:
- (2) Leupold, Georgi, Carl, Conrad: *Lehr- und Übungsbuch Mathematik*, Band 3, Verlag Harri Deutsch
- (3) Königsberger: *Analysis I*, 6. Auflage, Springer

Desweiteren wurden unter anderem folgende Internetseiten zu Rate gezogen:

- (i1) www.uni-protokolle.de
- (i2) www.iag.uni-hannover.de
- (i3) de.wikipedia.org
- (i4) www.mathematik-online.de
- (i5) www.matheboard.de: Den Usern des Matheboards (namentlich *Arthur Dent*, *tmo* und *Dual Space*) gebührt ein besonders großer Dank für die Denkanstöße und Hilfen, die sie mir geben konnten

E Abbildungsverzeichnis

Die Bilder wurden bis auf (G1) (mit freundlicher Genehmigung von www.leifiphysik.de) von mir mithilfe von Inkscape und Derive 5 erstellt.

Diese Arbeit wurde mithilfe von TeXnicCenter (MikTeX-Distribution) in L^AT_EX geschrieben.