

Die Eigenschaften des logistischen  
Modells und seine Anwendung auf die  
Entwicklung der Weltbevölkerung

Moritz Bitterling

Karls gymnasium Bad Reichenhall

Facharbeit im Leistungskurs Mathematik

Januar 2009

# Inhalt

1. Die Entwicklung der Menschheit.....	3
2. Das Modell des logistischen Wachstums.....	4
3. Eigenschaften des logistischen Modells.....	6
3.1 Definitionsbereich und Wertemenge.....	7
3.2 Verhalten für $0 < r < 1$ .....	8
3.3 Verhalten für $1 < r < 3$ .....	8
3.3.1 Einpendeln des Modells auf einen Sättigungswert: Der Fixpunkt.....	9
3.3.2 Graphische Iteration der logistischen Abbildung.....	10
3.4 Verhalten für $r > 3$ .....	12
3.4.1 Erste Periodenverdopplung: Das Auftreten von 2 stabilen Fixpunkten.....	12
3.4.2 Kriterium der Stabilität von Fixpunkten.....	14
3.4.3 Weitere Periodenverdopplungen.....	16
3.4.3.1 Die Feigenbaumkonstante.....	17
3.4.3.2 Berechnung von $r_\infty$ .....	17
3.5 Verhalten von $r > r_\infty$ .....	19
3.5.1 Sensitivität.....	20
3.5.2 Ordnung im Chaos.....	21
3.6 Das Bifurkationsdiagramm.....	25
3.7 Ausblick: Zusammenhang des logistischen Modells mit der Mandelbrotmenge.....	26
4. Verwendung des logistischen Modells zur Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung.....	27
4.1 Rückschluss auf die Parameter aus simulierten Daten.....	28
4.1.1 Berechnung eines Parameters: $r$ .....	28
4.1.2 Berechnung beider Parameter: $r$ und $Z_{\max}$ .....	29
4.1.2.1 Überprüfung der Qualität der berechneten Parameter.....	29
4.1.2.2 Konsequenzen aus der Möglichkeit der Berechnung der Parameter.....	30
4.1.2.3 Auswirkung des Abstands der Werte auf die Berechnung der Parameter.....	31
4.1.2.4 Ähnlichkeit der Simulation mit der Entwicklung der Weltbevölkerung.....	35
4.2 Rückschluss auf die Parameter aus realen Daten.....	36
4.3 Anwendung des Modells.....	38
4.3.1 Vergleich mit vergangener Entwicklung.....	38
4.3.2 Prognose der zukünftigen Entwicklung.....	39
5. Nichtlinearität in der Erdatmosphäre.....	41
6. Anhang.....	42
7. Abbildungsverzeichnis.....	53
8. Literaturverzeichnis.....	54

# 1. Die Entwicklung der Menschheit

*„Vor 2000 Jahren lebten schätzungsweise 300 Millionen Menschen auf der Welt – deutlich weniger als heute allein in der EU.[...] Lebten 1950 noch 2,5 Milliarden Menschen auf der Welt, sind es heute über 6,5 Milliarden und die Prognosen des UN/DESA reichen von 7,7 bis 10,7 Milliarden Menschen für das Jahr 2050.“<sup>1</sup>*

Das Wachstum der Bevölkerung - auch als „Bevölkerungsexplosion“ bezeichnet - wird mit seinen Auswirkungen sicherlich das Leben unserer Generation spürbar beeinflussen. Sei es der Anstieg des Durchschnittsalters von 23,9 Jahren im Jahr 1950 auf prognostizierte 37,8 Jahre in 2050<sup>1</sup> oder die Tatsache, dass sich die Bevölkerungsdichte von 19 Personen pro Quadratkilometer im Jahr 1950 auf ca. 67 im Jahr 2050<sup>1</sup> erhöhen wird; die Folgen der Vervielfachung der Bevölkerung zeigen sich schon heute und werden sich als noch gravierender herausstellen. Da stellt sich natürlich die Frage, wie sich das Bevölkerungswachstum in Zukunft gestalten wird: Wird die Bevölkerung weiter so wachsen wie bisher oder wird sich das Wachstum abschwächen? Eine einfache Prognose dieser komplizierten Entwicklung, so wie sie oben abgegeben wurde, ist zum Beispiel mit dem Verhulst-Modell möglich.

Dieses Modell wurde mir im letzten Sommer im Rahmen eines Vortrages von Prof. Dr. Manfred Kleber, TU München, vorgestellt. Zusammen mit Andrea Gierisch, z. Zt. UNIS, Spitzbergen, habe ich das Modell auf einige seiner Eigenschaften untersucht. Diese Erkenntnisse flossen in den ersten, theoretischen Teil dieser Arbeit ein, in dem ich Eigenschaften des logistischen Modells vorstellen möchte. Im zweiten Teil wird die Anwendung des Modells auf die Entwicklung der Menschheit gezeigt.

---

<sup>1</sup> Aus: Bundeszentrale für politische Bildung. Internetseite: <http://www.bpb.de/wissen/I6T8RL,0,0,Bev%F6lkerungswachstum.html> ohne Datum, aufgerufen am 24.1.2008.

## 2. Das Modell des logistischen<sup>2</sup> Wachstums

Dem Verhulst-Modell, das auch als logistisches Modell bezeichnet wird, liegt u. a. folgende Annahme zu Grunde: Solange keine Faktoren existieren, die das Wachstum einer Population hemmen, wächst deren Größe durch Fortpflanzung exponentiell: Sie nimmt mit einem konstanten Prozentsatz zu. Folgende Gleichung für exponentielles Wachstum in diskreten<sup>3</sup> Zeitschritten lässt sich aufstellen:

$$Z_{n+1} = r * Z_n^4$$

wobei  $r$  ein Wachstumsfaktor ( $r > 1$  bei Wachstum,  $1 > r > 0$  bei Abnahme der Population) und  $Z_n$  die Anzahl der Individuen ( $\hat{=}$  Größe der Population) im Jahr  $n$  bzw. im Zeitschritt  $n$  ist.

Wenn die Anzahl der Individuen zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt ist, kann durch **Iterationen** dieser Gleichung, also durch das Einsetzen des jeweils vorherigen Rechenergebnisses als neuer Ausgangswert, die Größe der Population zu jedem beliebigen Zeitpunkt bestimmt werden.

Folgendes Bild ergibt sich für zwanzig Iterationen mit dem Modell des exponentiellen Wachstums:

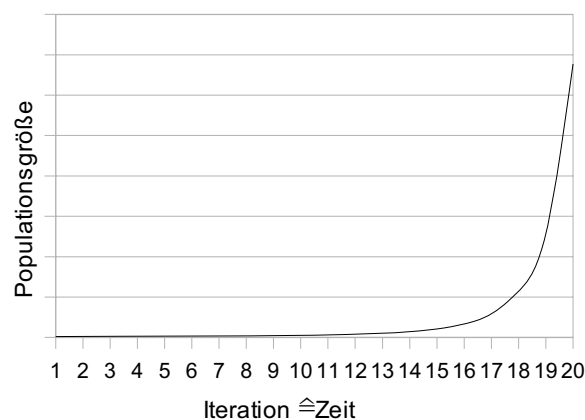


Abb. 1

Dass diese Gleichung des exponentiellen Wachstums von Populationen in der Realität kaum erfüllt werden kann, leuchtet schnell ein: Sie stellt zwar eine gute Näherung für Spezialfälle dar, wie zum Beispiel das frühe Wachstum einer Bakterienkolonie, die in ihrem Wachstum nicht durch Platz- oder Nahrungsmangel begrenzt wird, oder für die Entwicklung der Erdbevölkerung in den letzten Jahrhunderten. Was wäre aber, wenn sich das Wachstum der Menschheit in der Zukunft exponentiell fortsetzen würde? In wenigen Jahrzehnten wäre das

2 Logistisch: Auf mathematischer Logik beruhend. (Aus: Wermke, M. u. a. (Hrsg.): Duden, das Fremdwörterbuch. Mannheim, 2007.)

3 Diskret: Zahlenwerte, die durch endliche Intervalle voneinander getrennt stehen. (ebd.)

4 bzw.  $Z_n = r^n * Z_0$ , die exponentielle Eigenschaft ist hier deutlicher zu erkennen

Nahrungsangebot der Erde vollständig ausgeschöpft, da jeder Hektar Ackerland nur einen begrenzten Nahrungsertrag hat, und das bebaubare Land ebenfalls begrenzt ist. Selbst wenn die Menschheit dieses Problem umgehen könnte, gäbe es in einigen Jahrhunderten nicht mehr genügend Platz für die Menschen auf der Erde.

Um ein brauchbares Modell für die Entwicklung einer Population zu erhalten, muss also ein hemmender Faktor eingeführt werden. Dies ist im logistischen Modell durch das Hinzufügen eines begrenzenden Faktors zum exponentiellen Wachstum realisiert:

$$Z_{n+1} = r * Z_n * \left(1 - \frac{Z_n}{Z_{max}}\right) \quad (I)$$

Dabei ist  $Z_{max}$  die maximale Größe der Bevölkerung, die diese aufgrund äußerer Einflüsse annehmen könnte. Solange die Population im Verhältnis zu  $Z_{max}$  eine geringe Größe hat, hat der hemmende Faktor  $\left(1 - \frac{Z_n}{Z_{max}}\right)$  fast den Wert 1 und damit keinen spürbaren Einfluss bei der Iteration: Das Wachstum ist fast exponentiell. Sobald die Größe der Population aber einen höheren Wert annimmt, wächst der Einfluss des hemmenden Faktors an und bremst das Wachstum; die Größe der Population erreicht dann langsam einen Sättigungswert, wie folgende Abbildung zeigt:

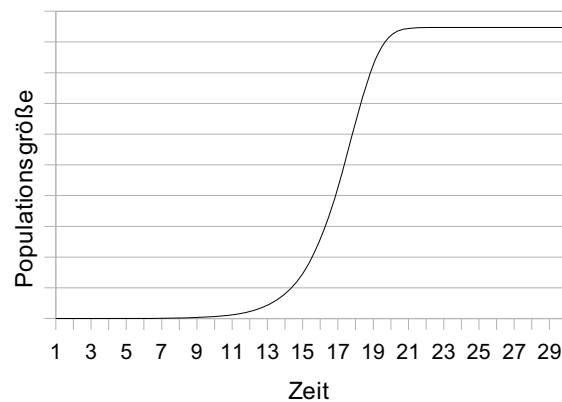


Abb. 2

Im Folgenden wird die logistische Gleichung in ihrer allgemeineren Form betrachtet: Mit einer Division durch  $Z_{max}$  wird Gleichung I auf 1 normiert, die dimensionslose Größe

$x_n = \frac{Z_n}{Z_{max}}$  bzw.  $x_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{Z_{max}}$  ist dann das Maß der Auslastung der Population:

$$x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n) \quad (II)$$

### 3. Eigenschaften des logistischen Modells

Bevor das logistische Modell im zweiten Teil der Arbeit so angewendet wird, wie es P. F. Verhulst 1845 verwendete – zur Untersuchung von Populationsdynamik – wird die Gleichung auf ihre Eigenschaften untersucht. Viele dieser wesentlichen Eigenschaften wurden erst über 100 Jahre nach der Entdeckung der Gleichung gefunden, was nicht unwesentlich der Entwicklung des Computers zu verdanken war. Mehrere richtungweisende Arbeiten zu dem Thema entstanden gegen Ende der 70er und zu Beginn der 80er Jahre, u.a. von M. Feigenbaum. Dieser sagte über eine seiner Entdeckungen: *„I called my parents that evening and told them that I had discovered something truly remarkable, that, when I had understood it, would make me a famous man.“*<sup>5</sup> Die Arbeiten stießen auf breites öffentliches Interesse - sehr ungewöhnlich bei einem derart mathematischen Thema, aber Begriffe wie „Chaostheorie“ oder „Butterfly-effect“ (die Theorie der Beeinflussung des Wettergeschehens durch den Flügelschlag eines Schmetterlings) faszinierten die Menschen. Es ist erstaunlich, wie die einfache logistische Funktion zu so komplexen Ergebnissen geführt hat, dass mehrere Generationen von Mathematikern daran gearbeitet haben.

*„Die logistische Abbildung beschreibt das einfachste System, das alle nichtlinearen Phänomene erfasst. Sie erzeugt Attraktoren, Bifurkationen, deterministisches Chaos und selbstähnliche Strukturen mit fraktaler Dimension.“*<sup>6</sup>

Auch wenn die Beschreibung all dieser Phänomene weit über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen würde, soll hier doch gezeigt werden, wie man schon mit sehr einfachen Mitteln erstaunliche Ergebnisse erreicht, beispielsweise den langsamen Ausbruch von Chaos oder die Herleitung einer neuen mathematischen Konstanten.

---

5 [2], S. 50

6 [1], S. 29

### 3.1 Definitionsbereich und Wertemenge

Die Betrachtung der logistischen Gleichung (II) als Funktion in Abhängigkeit von  $x_n$  wird sich später als sinnvoll erweisen:

$$x_{n+1} = f(x_n) = r * x_n * (1 - x_n) \quad (\text{III})$$

Aus  $0 \leq Z_n \leq Z_{max}$  und  $x_n = \frac{Z_n}{Z_{max}}$  folgt

$$0 \leq x_n \leq 1$$

Analog dazu  $0 \leq x_{n+1} \leq 1$

Wertemenge und Definitionsmenge von  $f(x_n)$  ist also **[0;1]**.

Zur Bestimmung des Definitionsbereiches von  $r$  ist die Scheitelform von  $f(x_n)$  hilfreich:

$$f(x_n) = -r * \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{r}{4}$$

Es gilt  $r > 0$ <sup>7</sup> (siehe oben), die logistische Funktion ist also eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel  $\left(\frac{1}{2} \mid \frac{r}{4}\right)$ .

Weil die Wertemenge nach oben beschränkt ist, darf der Scheitel der Parabel nicht höher als  $\left(\frac{1}{2} \mid 1\right)$  liegen, daraus folgt

$$0 < r \leq 4.$$

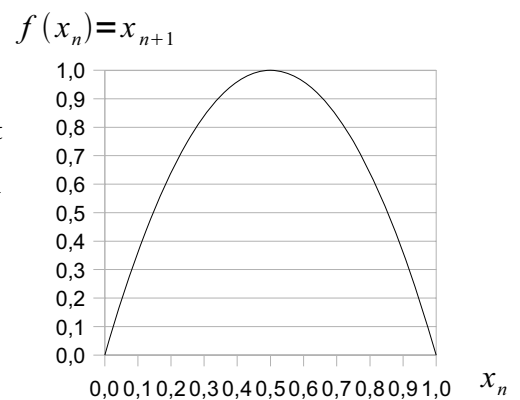


Abb. 3: Logistische Parabel für  $r=4$

Da somit bekannt ist, zwischen welchen Grenzen der Wachstumsfaktor  $r$  liegen darf, kann nun das Verhalten des logistischen Modells in Abhängigkeit von  $r$  untersucht werden.

<sup>7</sup> Anscheinend existieren die unten behandelten Phänomene in ähnlicher Weise auch für  $0 > r \geq -2$ . Allerdings ist dann die Bedingung  $0 \leq x_n \leq 1$  nicht mehr erfüllt, es gilt  $-0,5 \leq x_n \leq 1,5$ . In dieser Arbeit werden allerdings nur positive  $r$  behandelt. Siehe dazu auch Abb. 45 im Anhang.

### 3.2 Verhalten für $0 < r < 1$

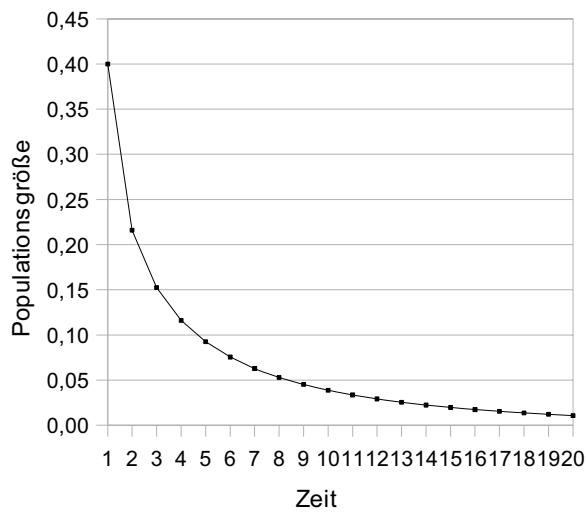


Abb. 4: Logistisches System für  $r=0,9$

Wie oben erwähnt, bedeutet  $r < 1$  einen Rückgang der Population, sie stirbt unabhängig vom Startwert aus.

### 3.3 Verhalten für $1 < r < 3$

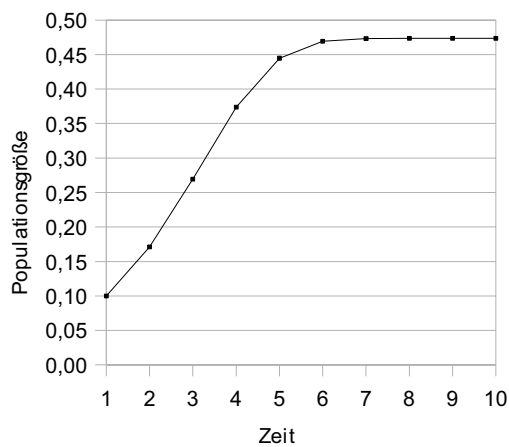


Abb. 5: Logistisches System für  $r=1,9$

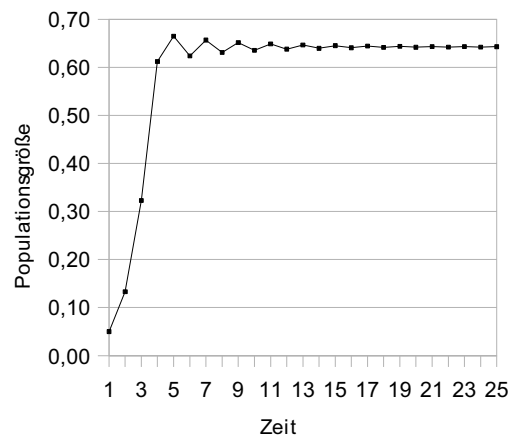


Abb. 6: Logistisches System für  $r=2,8$



### 3.3.1 Einpendeln des Modells auf einen Sättigungswert: Der Fixpunkt

An den beiden Graphen für  $r=1,9$  und  $r=2,8$  (Abb. 5 und 6) erkennt man, dass jede Population bis zu einem bestimmten Wert wächst und diesen nicht überschreitet. Es muss also einen Sättigungswert  $\hat{x}$  geben, der bei der Iteration durch  $f(x_n)$  (III) nicht mehr verändert wird. Folgende Bedingung muss daher für diesen *Fixpunkt*  $\hat{x}$  erfüllt sein:

$$f(\hat{x}) = r * \hat{x} * (1 - \hat{x}) = \hat{x} \quad (\text{IV})$$

Durch Umformung erhält man als Lösung  $\hat{x} = 1 - \frac{1}{r}$ <sup>8</sup>

Unabhängig vom Startwert pendelt sich jede Iteration auf diesem Fixpunkt ein:

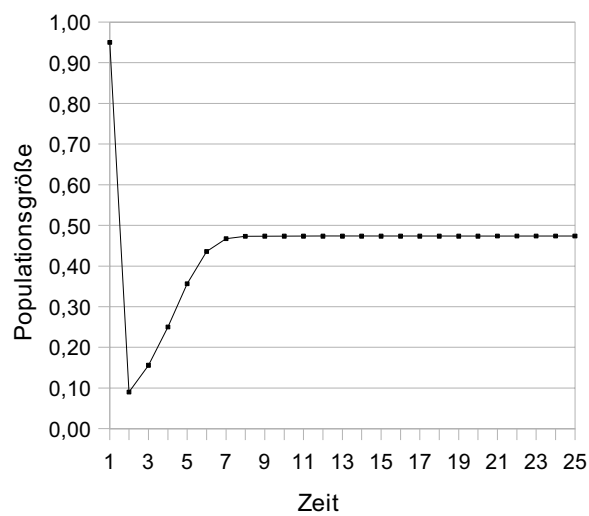


Abb. 7: Logistisches System für  $r=1,9$ , Startwert  $0,95$

Abb. 7 zeigt, dass das System auch für einen Startwert, der größer ist als sein Fixpunkt

$\hat{x} = 1 - \frac{1}{1,9} = 0,47$ , zu diesem Fixpunkt strebt.

<sup>8</sup> Es existiert außerdem die Lösung  $\hat{x} = 0$ , diese ist aber nie ein Sättigungswert. Zur Bedeutung dieses Spezialfalls siehe 3.4.2. Zur Lösung von IV siehe Anhang.

### 3.3.2 Graphische Iteration der logistischen Abbildung

Neben der rein rechnerischen Iteration existiert eine Möglichkeit, diese auch graphisch auszuführen. Dabei wird folgende Eigenschaft der logistischen Parabel (III) verwendet: Jedem Punkt auf der x-Achse ( $x_n$ ) wird das jeweilige Folglied der Iteration  $x_{n+1}$  durch  $f(x_n) = x_{n+1}$  eindeutig zugeordnet.

Die Abbildungen 8 – 11 zeigen den Ablauf der graphischen Iteration. Die einmalige Iteration wird auf Abb. 8 gezeigt. Vor der zweiten Iteration muss  $x_1$  nun von der y-Achse auf die x-Achse übertragen werden. Dies erreicht man durch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden (Abb. 9). Die zweite Iteration wird analog zur ersten durchgeführt:  $x_2$  ist der Funktionswert von  $x_1$  (Abb. 10). Mit diesem Verfahren lassen sich alle weiteren  $x_n$  graphisch ermitteln (Abb. 11).

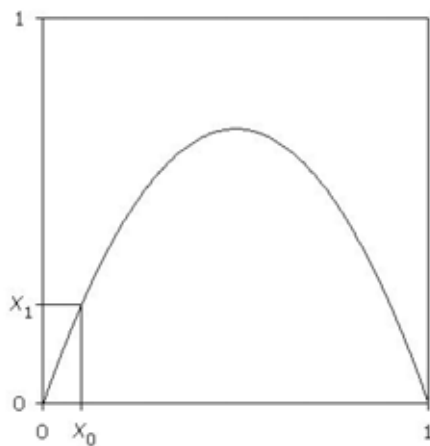


Abb. 8

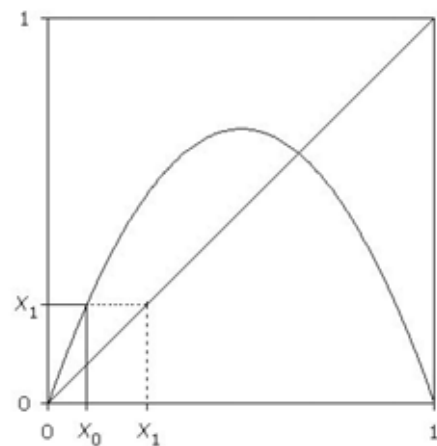


Abb. 9

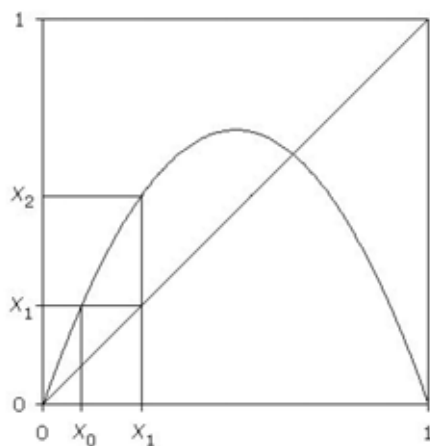


Abb. 10

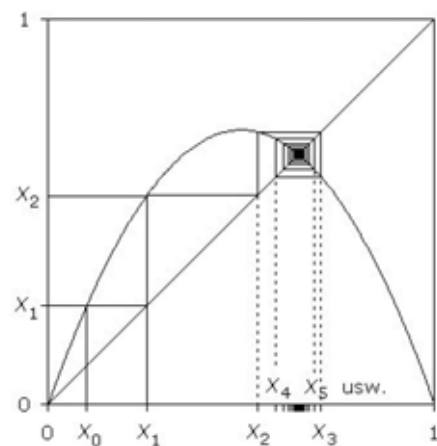


Abb. 11

Anstatt den Funktionswert nach jeder Iteration auf die x-Achse zu spiegeln und den zugehörigen Funktionswert wieder zu bestimmen, ist es ausreichend, von der Funktion waagrecht auf die Winkelhalbierende zurückzukehren und von dort aus wieder senkrecht zum Graphen der Funktion:

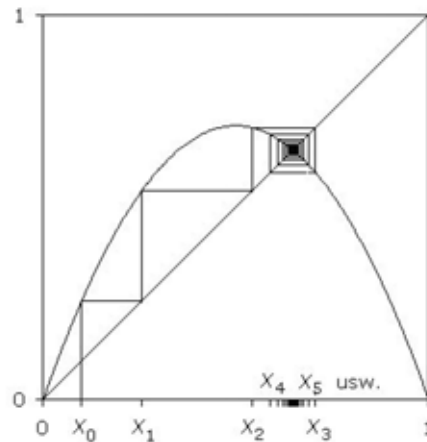


Abb. 12

Auch die Bestimmung des Fixpunktes von  $f(x_n)$  ist graphisch leicht möglich: Da für den Fixpunkt gilt  $f(\hat{x})=\hat{x}$  (IV), ist der Fixpunkt der Schnittpunkt der beiden Graphen  $y=f(x_n)$  und  $y=x_n$ .  $y=x_n$  ist die Winkelhalbierende:  $f(x_n)$  hat also im Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden ihren Fixpunkt. Dies erkennt man in obiger Abbildung auch daran, dass die Iterationen auf den Schnittpunkt mit der Winkelhalbierenden zustreben. Der zweite Schnittpunkt der Parabel mit der Winkelhalbierenden (im Ursprung) stellt einen Spezialfall dar, siehe dazu 3.4.2.

### 3.4 Verhalten für $r > 3$

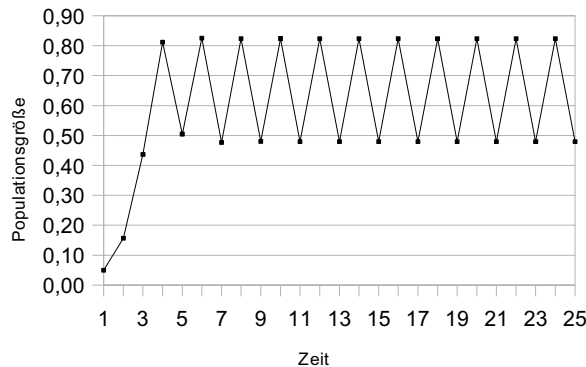


Abb. 13: Logistisches System für  $r=3,3$

#### 3.4.1 Erste Periodenverdopplung: Das Auftreten von 2 stabilen Fixpunkten

Die obige Graphik zeigt, dass die Theorie eines einzigen Fixpunktes, so wie sie in 3.3.1 eingeführt wurde, nicht für alle  $r$  gelten kann. Offensichtlich pendelt sich der Graph wieder ein, diesmal aber nicht auf einen, sondern abwechselnd auf zwei verschiedene Werte. Man spricht hier von einem 2-Zyklus oder einer 2-Periode. Die Werte, zwischen denen der Graph pendelt, können leicht berechnet werden, sind sie doch offensichtlich Fixpunkte der zweifach iterierten Funktion  $f(f(x_n))$ , im Folgenden  $f^2(x_n)$  genannt. Diese hat folgende Form:

$$x_{n+2} = f^2(x_n) = f(r * x_n * (1 - x_n)) = r * (r * x_n * (1 - x_n)) * (1 - (r * x_n * (1 - x_n))) \quad (\text{V})$$

Die beiden neuen Fixpunkte erhält man analog zur obigen Vorgehensweise durch Lösung von

$$f^2(\hat{x}) = \hat{x} \quad (\text{VI})$$

Die Berechnung der Lösungen von VI (Polynom 4. Grades) ist aufwendig. Das Polynom kann aber mit einer Division durch die beiden bekannten Nullstellen von  $f(x_n)$ , die von oben bekannt sind und die auch Nullstellen von  $f^2(x_n)$  sind, auf den 2. Grad reduziert und gelöst werden. Als Lösungen für  $\hat{x}$  erhält man nun die beiden Werte

$$\frac{1}{2} * \left(1 + \frac{1}{r}\right) * \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4}{1+r}\right)}\right) \quad (\text{VII})$$

Dass die beiden neuen Fixpunkte erst für  $r > 3$  existieren, lässt sich leicht zeigen: Für die Existenz von zwei verschiedenen Lösungen muss in VII der Term unter der Wurzel positiv sein, also

$$1 - \left(\frac{4}{1+r}\right) > 0, \text{ daraus folgt } r > 3.$$

9 Nullstellen aus: Vortrag v. Prof. Dr. M. Kleber, TU München. 13.-17.Mai 2008, Berchtesgaden.

Auch graphisch lässt sich die Entstehung von zwei neuen Fixpunkten veranschaulichen: Für  $r=2,85$  besitzt  $f^2(x_n)$  nur zwei Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden (siehe Abb. 14): Den Ursprung und den bekannten Fixpunkt aus 3.3.1. Dieser ist als Fixpunkt des Sättigungswertes, also eines 1-Zyklus, offensichtlich ebenfalls Fixpunkt eines 2-Zyklus: Ein 2-Zyklus (aber auch alle anderen Zyklen) ist also zwar vorhanden, aber nicht erkennbar, da wegen der Existenz des 1-Zyklus nicht nur jeder zweite Wert, sondern alle Werte gleich sind. Nach  $r=3$  entstehen aber zwei neue Schnittpunkte von  $f^2(x_n)$  mit der Winkelhalbierenden: Die beiden neuen Fixpunkte.

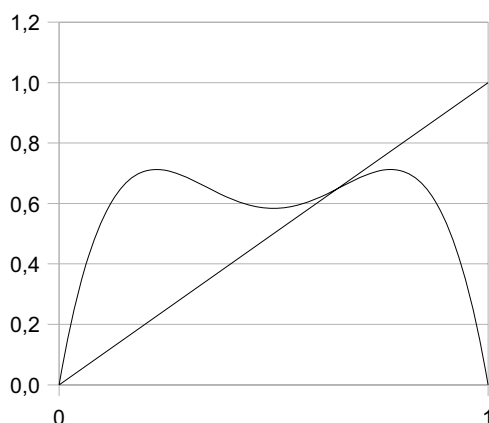


Abb. 14: Zweifach iterierte Funktion für  $r=2,85$

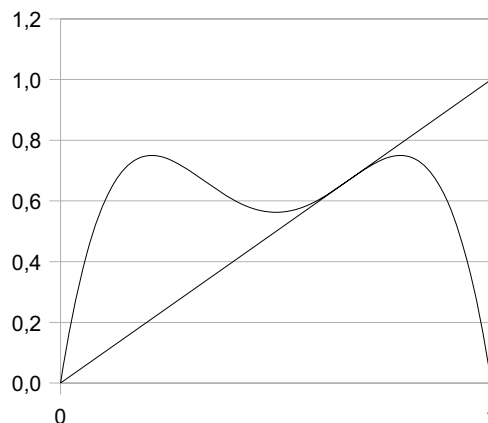


Abb. 15: Zweifach iterierte Funktion für  $r=3$

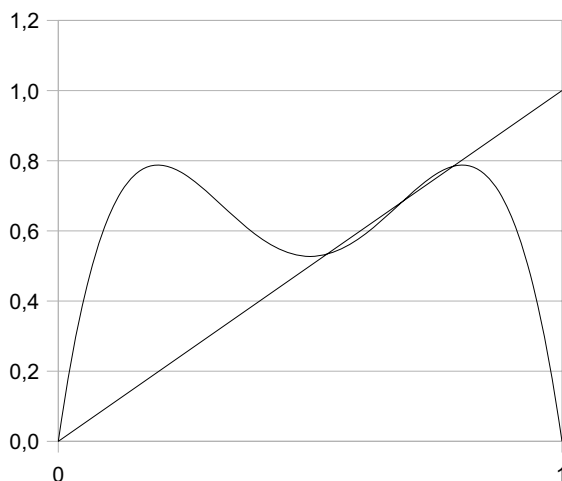


Abb. 16: Zweifach iterierte Funktion für  $r=3,15$

Es existieren nun also vier Fixpunkte, von denen zwei *stabil* und zwei *instabil* sind. Gibt es eine Möglichkeit, ohne Überprüfung der logistischen Systeme auf zyklisches Verhalten eine Aussage über die Stabilität eines berechneten Fixpunktes zu treffen? Diese Fragestellung wird im nächsten Abschnitt behandelt.

### 3.4.2 Kriterium der Stabilität von Fixpunkten

Um zu entscheiden, ob ein Fixpunkt lokal *stabil* ist, d. h. ob sich die Werte von  $x_n$  nach einer ausreichend großen Anzahl von Iterationen auf dem Fixpunkt befinden, bietet sich folgender Ansatz an:

$x_n$  sei ein Punkt in der näheren Umgebung des Fixpunktes  $\hat{x}$  von  $f(x_n)$ . Der Abstand zwischen  $x_n$  und  $\hat{x}$  sei  $\varepsilon_n$ . Wenn sich nun nach einer Iteration  $x_{n+1}$  näher an  $\hat{x}$  befindet als  $x_n$  an  $\hat{x}$ , ist der Fixpunkt *stabil*, man spricht dann von einem *Attraktor*. Ist  $x_{n+1}$  weiter vom Fixpunkt entfernt, ist dieser *instabil* und heißt *Repellor*.

Die mathematische Formulierung dieses Ansatzes, aus dem man das Entscheidungskriterium zwischen Stabilität und Instabilität eines Fixpunktes erhält, lautet wie folgt:

$$x_n = \hat{x} + \varepsilon_n \quad \text{(VIII)}$$

$$x_{n+1} = \hat{x} + \varepsilon_{n+1} \quad \text{(IX)}$$

Aus III und VIII folgt:

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(\hat{x} + \varepsilon_n) \quad \text{(X)}$$

In der Umgebung des Fixpunktes (also für sehr kleine  $\varepsilon_n$ ) kann man die Kurve  $y = f(x_n)$  durch die Tangente an  $f(x_n)$  im Punkt  $P(\hat{x} | f(\hat{x}))$  ersetzen.

Die Gleichung dieser Tangente lautet

$$y = f'(\hat{x}) * (x_n - \hat{x}) + f(\hat{x}) \quad \text{10}$$

Was durch  $x_n - \hat{x} = \varepsilon_n$  (folgt aus VIII) und  $f(\hat{x}) = \hat{x}$  (IV) gleichbedeutend ist mit

$$y = f'(\hat{x}) * \varepsilon_n + \hat{x} \quad \text{(XI)}$$

Aus X, IX und XI folgt

$$y = f(\hat{x} + \varepsilon_n) = x_{n+1} = \hat{x} + \varepsilon_{n+1} = f'(\hat{x}) * \varepsilon_n + \hat{x}$$

$$\varepsilon_{n+1} = f'(\hat{x}) * \varepsilon_n \quad \text{(XII)}$$

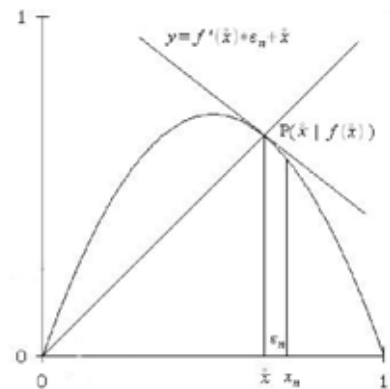


Abb. 17

10 Gleichung aus: Barth, F., Mühlbauer, P., Nikol, F., Wörle, K.: Mathematische Formeln und Definitionen. München, 2003. S.58.

Aus XII folgt: Wenn der *Betrag der Steigung von  $f(x_n)$  im Fixpunkt ( $|f'(\hat{x})|$ )* kleiner als 1 ist, dann ist  $\varepsilon_{n+1}$  kleiner als  $\varepsilon_n$ . Somit nähert sich  $x_n$  bei der Iteration dem Fixpunkt. Ist  $|f'(\hat{x})| \geq 1$ , dann kann der Fixpunkt durch Iterationen nicht erreicht werden, er ist instabil. Die einzige Möglichkeit, den Fixpunkt doch zu erreichen, besteht darin, diesen als Startwert der Iterationen zu wählen.  $\varepsilon_n$  hat dann den Wert 0 und  $\varepsilon_{n+1}$  bleibt für beliebige  $f'(\hat{x})$  gemäß XII ebenfalls 0.

Die Bedingung für die Existenz eines Attraktors ist also  $|f'(\hat{x})| < 1$ . (XIII)

Die Fixpunkte, die oben gefunden wurden und deren Stabilität in 3.2, 3.3.1 und 3.4.1 graphisch ermittelt wurde, können nun zur Überprüfung in XIII eingesetzt werden.

Dabei wird für die Berechnung der Fixpunkte der 1-Zyklen

$$f'(x_n) = r - 2 * r * x_n$$

verwendet. Die 2-Zyklen werden mit

$$f^2'(x_n) = -4 * r^3 * x_n^3 + 6 * r^3 * x_n^2 - 2 * x_n * (r^2 + r^3) + r^2 \text{ berechnet.}^{11}$$

Auf das Einsetzen der letzten drei Fixpunkte in  $f^2'(x_n)$  soll unten aber verzichtet werden, da dies aufwändig ist.

r	Fixpunkte $\hat{x}$	Verwendete Ableitung	Betrag der Steigung im Fixpunkt: $ f'(\hat{x}) $	Stabilität
$0 < r < 1$	0	$f'(x_n) = r - 2 * r * x_n$	$ f'(0)  =  r  < 1$	<i>stabil</i>
$1 < r < 3$	0	$f'(x_n) = r - 2 * r * x_n$	$ f'(0)  =  r  > 1$	<i>instabil</i>
	$1 - \frac{1}{r}$	$f'(x_n) = r - 2 * r * x_n$	$ f'(1 - \frac{1}{r})  =  2 - r  < 1$	<i>stabil</i>
$3 < r < 3,45^{12}$	0	$f^2'(x_n)$	$ f^2'(0)  =  r^2  > 1$	<i>instabil</i>
	$1 - \frac{1}{r}$	$f^2'(x_n)$	$ f^2'(1 - \frac{1}{r})  > 1$	<i>instabil</i>
	$\frac{1}{2} * (1 + \frac{1}{r}) * (1 - \sqrt{1 - (\frac{4}{1+r})})$	$f^2'(x_n)$	$ f^2'(\frac{1}{2} * (1 + \frac{1}{r}) * (1 - \sqrt{1 - (\frac{4}{1+r})}))  < 1$	<i>stabil</i>
	$\frac{1}{2} * (1 + \frac{1}{r}) * (1 + \sqrt{1 - (\frac{4}{1+r})})$	$f^2'(x_n)$	$ f^2'(\frac{1}{2} * (1 + \frac{1}{r}) * (1 + \sqrt{1 - (\frac{4}{1+r})}))  < 1$	<i>stabil</i>

11 Zur Herleitung von  $f^2'(x_n)$  siehe Anhang

12 Zum Wert  $1 + \sqrt{6} \approx 3,45$  siehe 3.4.3

Die rechnerisch ermittelten Ergebnisse der Stabilität der Fixpunkte stimmen mit den graphisch ermittelten Ergebnissen überein.

### 3.4.3 Weitere Periodenverdopplungen

Folgende Graphiken zeigen das Verhalten des logistischen Modells für noch größere  $r$ :

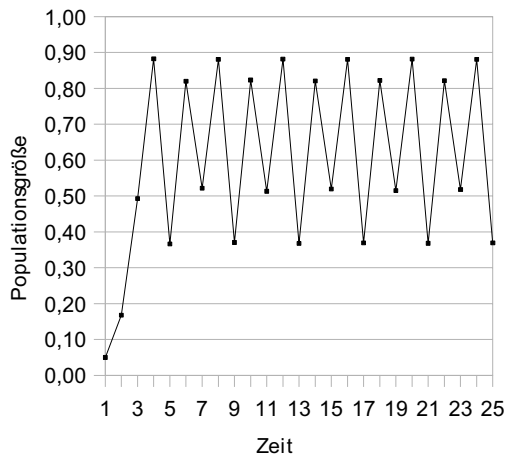


Abb. 18: Logistisches System für  $r=3,53$

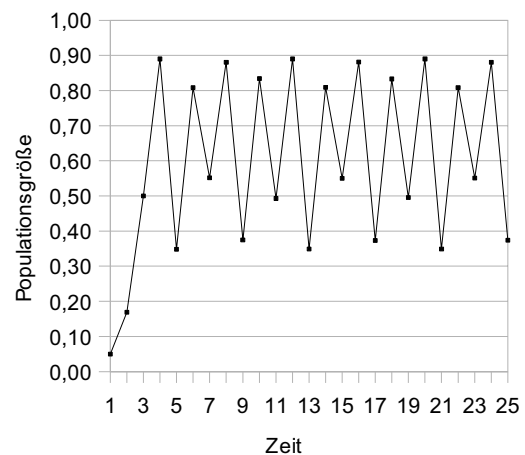


Abb. 19: Logistisches System für  $r=3,56$

Anscheinend ist die erste Periodenverdopplung, die bei  $r=3$  geschieht, nicht die einzige. Neben dem von oben bekannten 2-Zyklus existiert ein 4-Zyklus (Abb. 18) und ein 8-Zyklus (Abb. 19). Die Werte von  $r$ , bei denen die Periodenverdopplungen geschehen, lassen sich analog zu dem oben gezeigten Vorgehen ermitteln: Die Gleichungen  $f^3(\hat{x})=\hat{x}$ ,  $f^4(\hat{x})=\hat{x}$  usw. sind zu lösen, daraufhin muss geprüft werden, ab welchem Wert von  $r$  die Lösungen existieren (siehe 3.4.1). Da die Polynome der Form  $f^m(x_n)$  aber sehr schnell einen hohen Grad erreichen, bietet sich auch die Näherung mit einem Computer an.

Dabei erhält man die folgenden Ergebnisse<sup>13</sup>:

<b>b</b>	1	2	3	4	5	6	...
<b><math>r_b</math></b>	1	3	3,4495...	3,5440...	3,564407...	3,568759...	...

**b** steht für *Bifurkation*: Der Übergang eines Fixpunktes vom stabilen in den instabilen Zustand. Dies geschieht zum ersten Mal bei  $r=1$ , wenn  $\hat{x}=0$  instabil wird und  $\hat{x}=1-\frac{1}{r}$  entsteht. Die zweite Bifurkation ist die erste Periodenverdopplung bei  $r=3$ , die dritte Bifurkation ist die zweite Periodenverdopplung usw.

<sup>13</sup> Werte aus: [1] und Lykke Pedersen: Formelsamling Kaos 2005. Internetseite: <http://www.bjerregaard-simonsen.dk/sbs/Formelsamling/kaos.pdf> ohne Datum, aufgerufen am 14.1.2008.



### 3.4.3.1 Die Feigenbaumkonstante

Aus obiger Tabelle ist ersichtlich, dass der Abstand zwischen den Bifurkationen immer kleiner wird. Das Verhältnis der Abstände zwischen den Bifurkationen nähert sich aber einem bestimmten Wert: Diese Zahl wird Feigenbaumkonstante genannt.

*„Als Feigenbaum im August 1975 diese Zahl errechnete, konnte er sie wegen fehlender Genauigkeit des HP65 nur auf drei Stellen genau ermitteln. Er verbrachte einige Zeit mit dem Versuch, sie auf bereits bekannte Konstanten zurückzuführen. Mittlerweile ist sie selber zu einer solchen geworden, und wird die Feigenbaum-Konstante genannt. Im Oktober 1975 war dann Feigenbaum klar, dass dieselbe Zahl für eine grosse Klasse von periodenverdoppelnden Abbildungen gilt.“<sup>14</sup>*

Da das Verhältnis der Abstände von drei aufeinander folgenden Bifurkationen die Konstante definiert, kann sie mit folgender Formel numerisch bestimmt werden:

$$\delta = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{r_b - r_{b-1}}{r_{b+1} - r_b} = 4,669202\dots$$

### 3.4.3.2 Berechnung von $r_\infty$

Mit der Kenntnis der Feigenbaumkonstante lässt sich nun berechnen, gegen welchen Wert  $r_b$  für  $b \rightarrow \infty$  strebt:

$$r_\infty = r_i + (r_{i+1} - r_i) + (r_{i+2} - r_{i+1}) + (r_{i+3} - r_{i+2}) + \dots$$

Durch Ausklammern von  $(r_{i+1} - r_i)$  erhält man

$$r_\infty = r_i + (r_{i+1} - r_i) \left( 1 + \frac{(r_{i+2} - r_{i+1})}{(r_{i+1} - r_i)} + \frac{(r_{i+3} - r_{i+2})}{(r_{i+1} - r_i)} + \dots \right)$$

Das Erweitern mit geeigneten Faktoren führt nun zu einer Reihe der Form  $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} + \dots$ ,

$$\text{da } \frac{1}{\delta} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{r_{b+1} - r_b}{r_b - r_{b-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{r_{i+2} - r_{i+1}}{r_{i+1} - r_i} = \dots :$$

---

14 [2], S. 51

$$r_{\infty} = r_i + (r_{i+1} - r_i) * \left\{ 1 + \frac{(r_{i+2} - r_{i+1})}{(r_{i+1} - r_i)} + \frac{(r_{i+2} - r_{i+1}) * (r_{i+3} - r_{i+2})}{(r_{i+1} - r_i) * (r_{i+2} - r_{i+1})} + \dots \right\}$$

$$r_{\infty} = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i + (r_{i+1} - r_i) * \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \dots \right\}$$

$$r_{\infty} = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i + (r_{i+1} - r_i) * \frac{1}{1 - \frac{1}{\delta}}$$

Eine gute Näherung für  $r_{\infty}$  erhält man schon für kleine  $i$ . Sie beträgt bei  $i=5$  und den oben verwendeten gerundeten Werten für  $r_5$ ,  $r_6$  und  $\delta$  ungefähr 3,569945.

Nun stellt sich die Frage, wie sich das logistische Modell für  $r > r_{\infty}$  verhält.  $r_{\infty}$  wird auch als „Übergang ins Chaos“ bezeichnet. Im nächsten Abschnitt sollen einige Aspekte des chaotischen Verhaltens der Gleichung betrachtet werden.

### 3.5 Verhalten von $r > r_\infty$

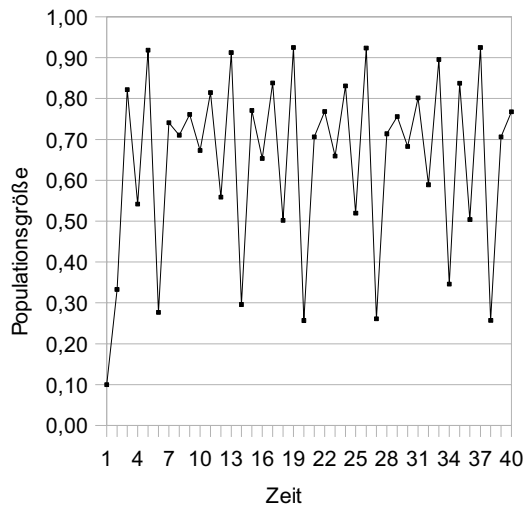


Abb. 20: Logistisches System für  $r=3,7$

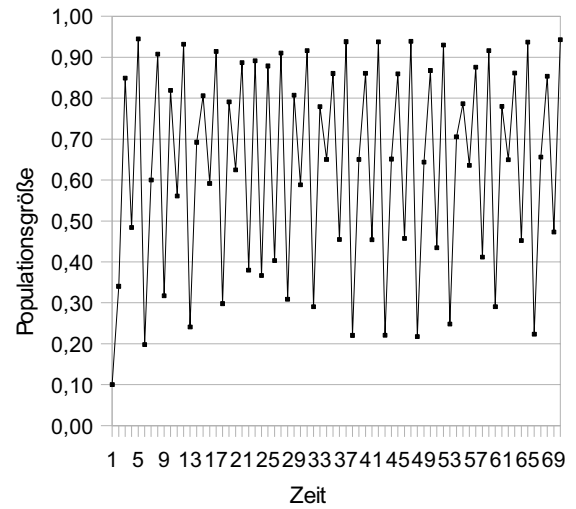


Abb. 21: Logistisches System für  $r=3,782345$

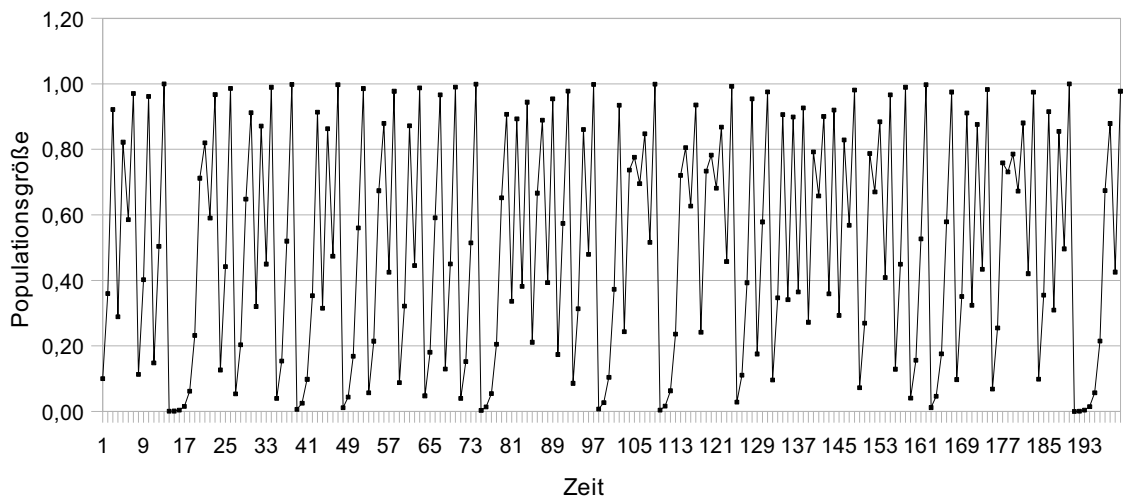


Abb. 22: Logistisches System für  $r=4$

Die drei Graphen befinden sich auch nach 40, 69 und 193 Iterationen noch nicht in einem erkennbaren Zyklus. Daher ist ihr Verhalten nicht mehr voraussagbar, denn es sind keine erkennbaren Attraktoren mehr vorhanden. In Abb. 21 fällt auf, dass das Modell ab der 41. Iteration kurz ein 5-zyklisches Verhalten aufweist. Kurzes zyklisches Verhalten wird als Intermittenz bezeichnet. Für  $r=4$  in Abb. 22 springen die Iterationen chaotisch zwischen 0 und 1 umher.

### 3.5.1 Sensitivität

Für  $r < r_\infty$  hatten Graphen mit ähnlichen Startwerten und gleichem  $r$  einen ähnlichen Verlauf, und für beliebige Startwerte (mit Ausnahme der instabilen Fixpunkte) pendelte sich der Graph in einen Zyklus ein. Diese Eigenschaft verliert das System für  $r > r_\infty$ . Das Verhalten von zwei Graphen mit ähnlichen Startwerten und gleichem  $r$  zeigt folgende Abbildung:

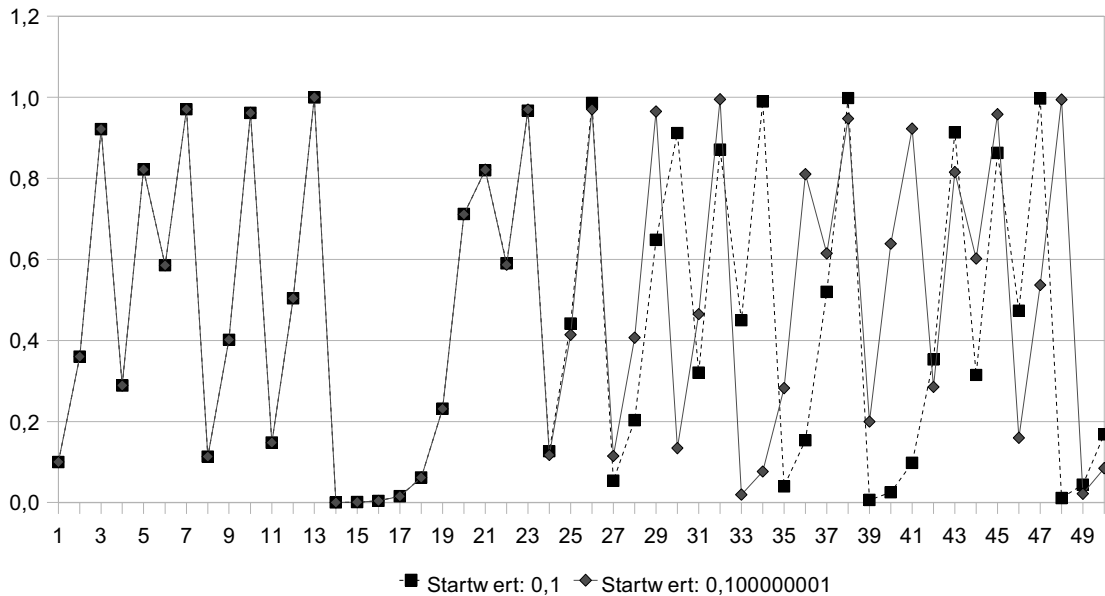


Abb. 23: Zwei logistische Systeme mit ähnlichen Anfangsbedingungen bei  $r=4$

Die beiden Systeme lassen sich in den ersten Iterationen nicht unterscheiden. Ab der 24. Iteration deutet sich die Abweichung aber an und nach der 29. Iteration verhalten sie sich ganz unterschiedlich. Man spricht hier von einer *sensitiven Abhängigkeit* der Systeme von ihren Startwerten: Ein winziger Unterschied in den Startwerten erzeugt auf längere Sicht komplett unterschiedliche Ergebnisse. Diese Eigenschaft ist beispielsweise von Wetterprognosen bekannt: Das Wetter kann nur für wenige Tage relativ genau vorhergesagt werden. Die theoretische Berechnung ist zwar für viele Wochen im Voraus möglich, allerdings zeigt das obige Beispiel, welcher Unterschied im Ergebnis sich zum Beispiel für einen winzigen Messfehler im Startwert der Temperatur oder des Luftdrucks ergeben würde.

### 3.5.2 Ordnung im Chaos

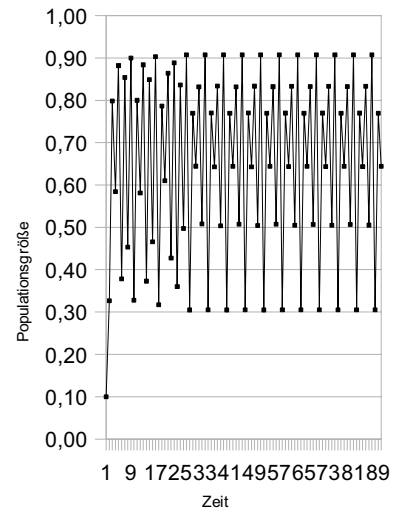
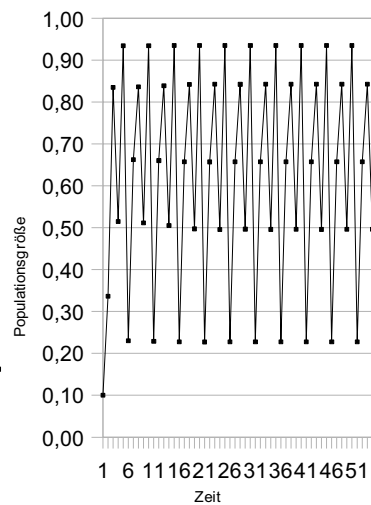
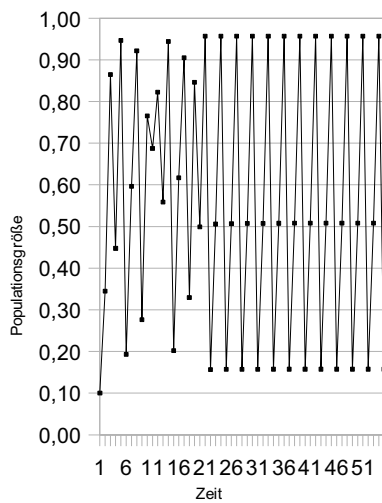


Abb. 24: Logistisches Modell für  $r=3,83$     Abb. 25: Logistisches Modell für  $r=3,74$     Abb. 26: Logistisches Modell für  $r=3,63$

Offensichtlich gibt es aber auch im chaotischen Bereich für bestimmte  $r$  Attraktoren und Zyklen. Abbildungen 24-26 zeigen einen 3-, einen 5- und einen 6-Zyklus. Diese Zyklen lassen sich einfach mit einer graphischen Methode finden. Die Methode soll für den 5-Zyklus um  $r=3,74$  gezeigt werden.

Wie in 3.4.3 angesprochen, benötigt man zum Finden eines  $m$ -Zyklus  $f^m(x_n)$ . Die Funktion ist für  $m=5$  mathematisch sehr aufwändig zu formulieren, allerdings lässt sie sich graphisch leicht darstellen, indem die Punkte in der Wertemenge von  $x_n$  fünfmal mit  $f^1(x_n)$  iteriert werden. Es zeigt sich, dass immer mehr Schnittpunkte von  $f^5(x_n)$  mit der Winkelhalbierenden entstehen, wenn der Parameter  $r$  vergrößert wird – insgesamt kommen dreimal je zehn Schnittpunkte dazu (Auf Abb. 28, 30 und 31). In 3.4.1 wird darauf hingewiesen, dass das Auftreten von neuen Schnittpunkten von  $f^m(x_n)$  mit der Winkelhalbierenden mit dem Auftreten von neuen Fixpunkten gleichzusetzen ist. Kurz nach der Entstehung von neuen Fixpunkten ist die Steigung von  $f^5(x_n)$  in jedem zweiten Schnittpunkt so gering, dass die Fixpunkte stabil sind.

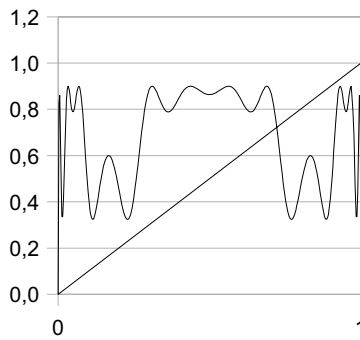


Abb. 27: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,6$

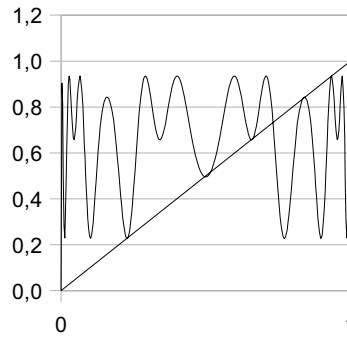


Abb. 28: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,74$

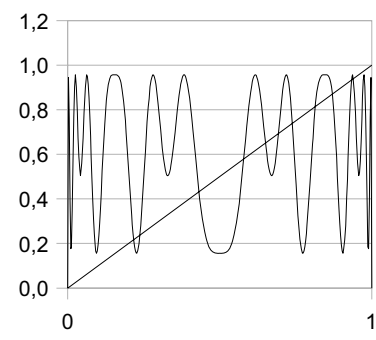


Abb. 29: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,83$

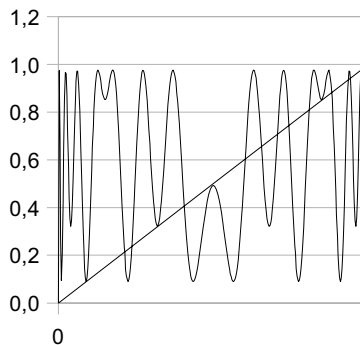


Abb. 30: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,905$

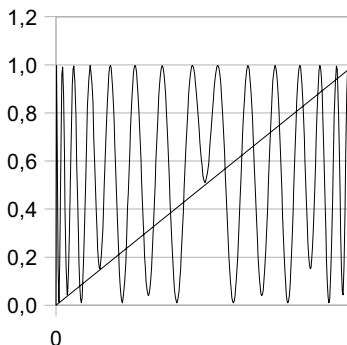


Abb. 31: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,99$

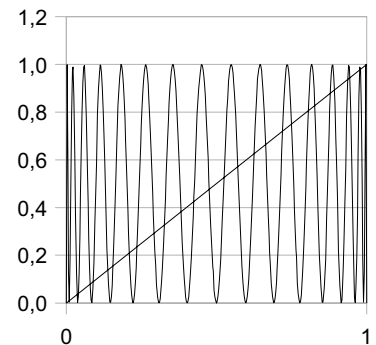


Abb. 32: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=4$

Der ungefähre Wert von  $r$ , um den ein stabiler Zyklus auftritt, lässt sich nun so ermitteln: Man lässt  $f^5(x_n)$  für ein beliebiges  $r$  mit einem graphischen Computerprogramm zeichnen. Daraufhin wird  $r$  schrittweise erhöht, bis neue Schnittpunkte zwischen  $f^5(x_n)$  und der Winkelhalbierenden entstehen. Nun muss versucht werden, den genauen Wert von  $r$  zu ermitteln, bei dem die Schnittpunkte auftreten. Dies kann durch eine manuelle Intervallschachtelung bei hoher Auflösung der Graphik und gleichzeitiger Betrachtung des mittleren Maximums/Minimums von  $f^5(x_n)$  erreicht werden, da die Entfernung dieses Extrempunktes von der Winkelhalbierenden im Vergleich zu den Entfernungen der anderen Extrema von einer Änderung des Parameters  $r$  am meisten beeinflusst wird.

Wegen der Lage des Extrempunktes bei  $f^m(0,5)$  bietet sich auch die Möglichkeit,  $f^m(0,5)=0,5$  durch die Beeinflussung des Parameters  $r$  anzunähern. Wenn  $r$  genau so gewählt wird, dass gilt  $f^m(0,5)=0,5$ , existiert ein Schnittpunkt von  $f^m(x_n)$  mit der Winkelhalbierenden im Punkt  $(0,5|0,5)$  und damit  $m$  Schnittpunkte bei allen Extrema von  $f^m(x_n)$ .<sup>15</sup>

<sup>15</sup> Für die Entstehung von Zyklen durch Periodenverdopplung gelten diese Ausführungen nur bedingt. Auf die Beschreibung der Periodenverdopplung wird hier aber verzichtet.

Während der Näherung lässt sich durch gleichzeitige Kontrolle der logistischen Systeme feststellen, wann sich das Modell im Zyklus befindet:

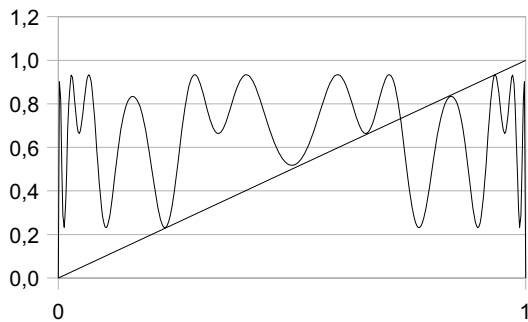


Abb. 33: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,735$   
Für  $r = 3,735$  gilt  $f^5(0,5) \approx 0,517579$

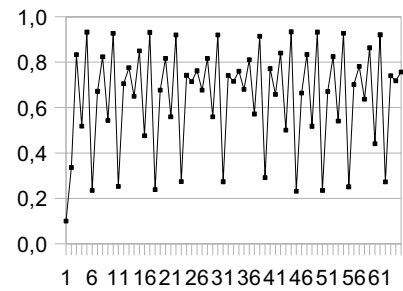


Abb. 34: Logistisches System für  $r=3,735$

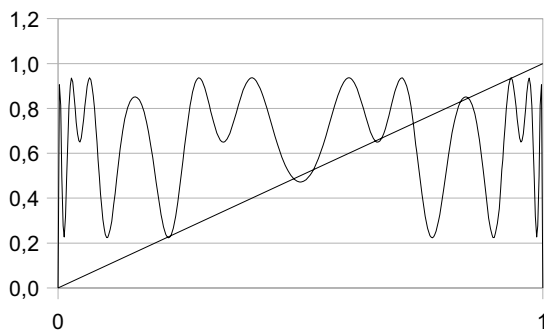


Abb. 35: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,745$   
Für  $r = 3,745$  gilt  $f^5(0,5) \approx 0,472220$

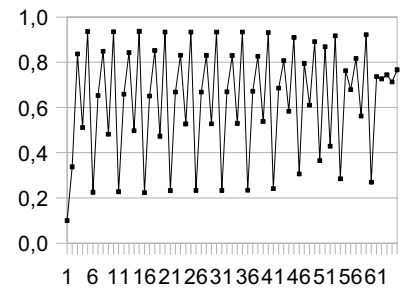


Abb. 36: Logistisches System für  $r=3,745$

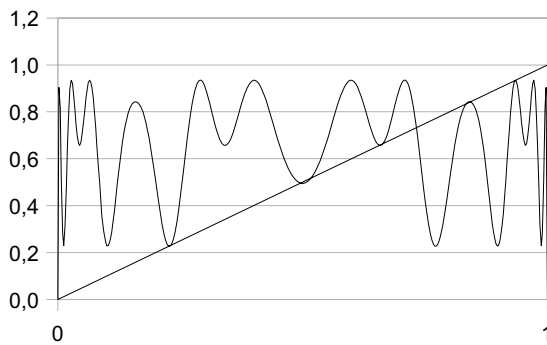


Abb. 37: Fünfmal iterierte Funktion für  $r=3,74$   
Für  $r = 3,74$  gilt  $f^5(0,5) \approx 0,495084$

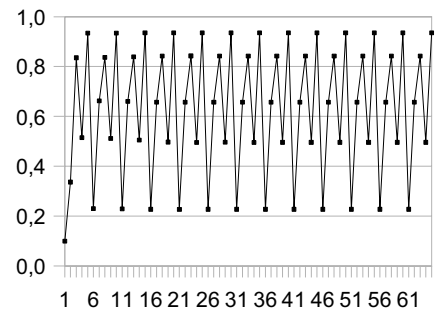


Abb. 38: Logistisches System für  $r=3,74$

Mit der selben Methode erhält man für  $r_{\infty} < r < 4$  die folgenden m-Zyklen:

m	Auftreten des Zyklus um $r=$	m	Auftreten des Zyklus um $r=$
2	3	6	3,93757
4	3,45	7	3,95104
6	3,63	4	3,961
7	3,7018	7	3,968976
5	3,74	6	3,977803
7	3,774215	7	3,984748
3	3,83	5	3,990267
6	3,844	7	3,994537809111
7	3,88605	6	3,9975831182
5	3,906	7	3,9993970609621
7	3,922194		

Die Betrachtung der Zyklen ist vollständig. Weitere m-Zyklen mit  $m \leq 7$  existieren nicht.

Die Graphen der mehrfach iterierten logistischen Funktionen, mit denen die Näherungen durchgeführt wurden, befinden sich im Anhang.

Es ist allerdings anzumerken, dass die obige Methode nur eine Annäherung ist und dass das exakte Intervall, in dem der Zyklus auftritt, nur annähernd abgeschätzt werden kann: Denn die Betrachtung der iterierten Werte, so wie sie oben zur Identifikation und Verifikation eines Zyklus verwendet wird, ist nur eine ungefähre Abschätzung, da vor dem Einsetzen eines Zyklus starke Intermittenz auftritt und diese nicht eindeutig von dem stabilen Zyklus abgrenzbar ist.



### 3.6 Das Bifurkationsdiagramm

Die Ergebnisse, die oben gewonnen wurden, lassen sich in einer Graphik zusammenfassen: Dem Bifurkations- oder Feigenbaumdiagramm. Für dessen Erstellung wird ein Startwert mehrere 1000 Mal mit  $f(x_n)$  bei verschiedenen Werten von  $r$  iteriert. Die letzten Ergebnisse jeder Iteration (ihre Anzahl liegt meist im dreistelligen Bereich) werden dann über  $r$  in das Diagramm eingetragen. Man geht dabei davon aus, dass sich alle Werte nach genügend vielen Iterationen auf Fixpunkten befinden – falls für das gewählte  $r$  einer oder mehrere existieren. Im Feigenbaumdiagramm lassen sich daher die Periodenverdopplungen bis  $r_\infty$ , der Ausbruch des Chaos nach  $r_\infty$  und die „Inseln der Ordnung“ im Chaos erkennen.

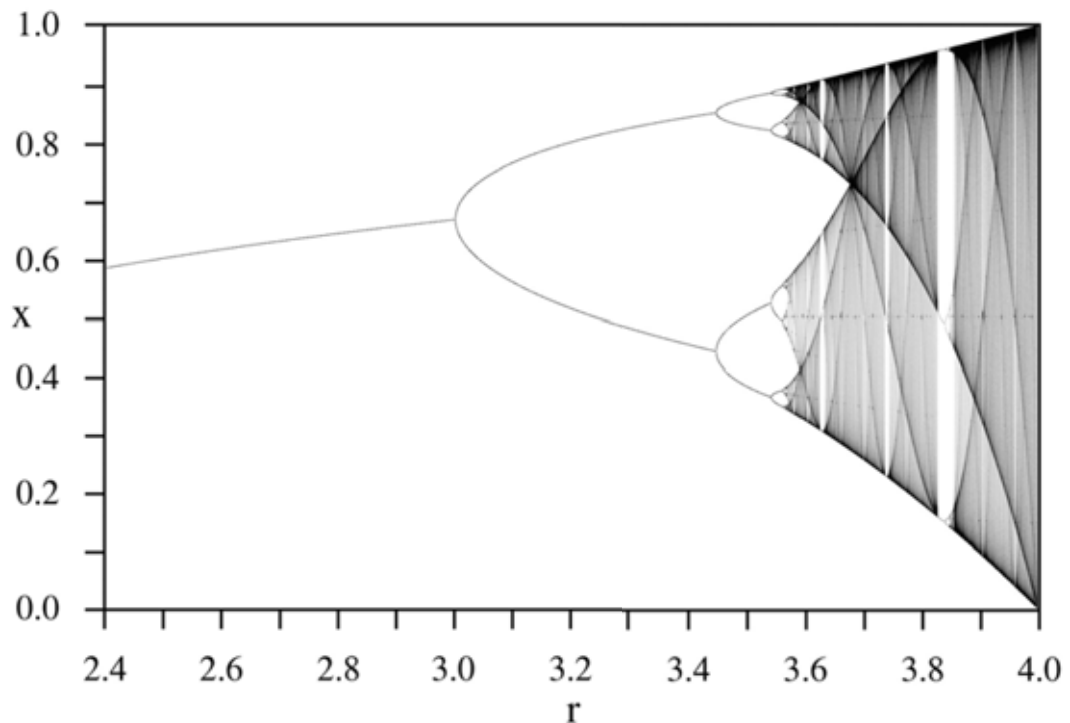


Abb. 39

### 3.7 Ausblick: Zusammenhang des logistischen Modells mit der Mandelbrotmenge

Um die Betrachtung der Eigenschaften des logistischen Modells abzuschließen, wird hier ein kurzer Ausblick auf ein weiteres Merkmal des logistischen Modells gegeben: Seine Beziehung zur Mandelbrotmenge. Durch eine Substitution von  $x$  in II durch  $\frac{-z}{r} + \frac{1}{2}$  erhält man eine Gleichung der Form  $z_{n+1} = z_n^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2}$ <sup>16</sup>. Die Ähnlichkeit zur Iterationsvorschrift der Mandelbrotmenge  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  ist erkennbar. Viele Eigenschaften des logistischen Modells finden sich auch bei der Mandelbrotmenge, wie zum Beispiel das Auftreten von Fixpunkten bei der Iteration,  $m$ -Zyklen oder Periodenverdopplungen. Außerdem besitzt sowohl das Feigenbaumdiagramm als auch die Mandelbrotmenge die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit, die darin besteht, dass Vergrößerungen einer Struktur ähnliche Strukturen und Muster aufweisen wie die ursprüngliche Struktur.

Die Mandelbrotmenge befindet sich in der komplexen Zahlenebene und ist definiert durch die Menge aller  $c$ , für die die Iteration  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  mit  $z_0 = 0$  nicht gegen  $\infty$  strebt. Diese Menge ist in Abb. 40 schwarz eingefärbt. Die Iterationen, die mit einem  $c$  aus der Mandelbrotmenge durchgeführt werden, haben im Gegensatz zu Iterationen mit  $c$  außerhalb der Menge einen oder mehrere Attraktoren.

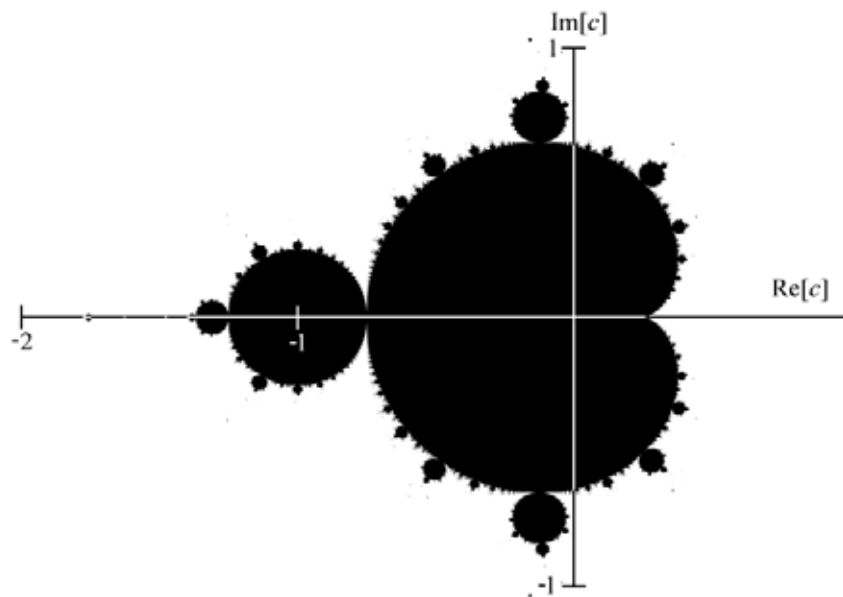


Abb. 40

<sup>16</sup> Zur Herleitung siehe Anhang

## 4. Verwendung des logistischen Modells zur Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung

Ob sich das logistische Modell mit seinen vielfältigen und chaotischen Eigenschaften wirklich zur Simulation der Bevölkerungsentwicklung eignet, ist fraglich. Zwei Tatsachen sprechen aber dafür: Erstens war das Wachstum der Weltbevölkerung im Frühstadium annähernd exponentiell. Zweitens gibt es Faktoren, die das Wachstum der Menschheit hemmen. D. L. Meadows nennt in „Die Grenzen des Wachstums und Planung für die Zukunft“ vier solcher Faktoren: Der Vorrat an ausbeutbaren, nicht erneuerbaren Rohstoffen sei endlich, die Absorptionskapazität der Umwelt für Schadstoffe sei endlich, die Reserven potentiellen Ackerlandes seien endlich und der Ertrag pro Hektar Ackerland sei endlich.<sup>17</sup> Diese Faktoren müssen zwangsweise zu einem Erliegen des Wachstums führen:

*„Auch wenn das Erreichen der "Grenze des Wachstums" in der Vergangenheit häufig falsch datiert worden ist, besteht kein Zweifel an der Endlichkeit vieler Ressourcen, die für die bestehenden Gesellschaftsformen unverzichtbar sind.“<sup>18</sup>*

Für  $r < 3$  besitzt das logistische Modell ebendiese Eigenschaften: Das Wachstum ist im Frühstadium fast exponentiell, es wird durch einen Faktor gehemmt und erreicht eine Sättigung. Folgende Graphik zeigt die Ähnlichkeit zwischen der Entwicklung der Weltbevölkerung und dem logistischen Modell:

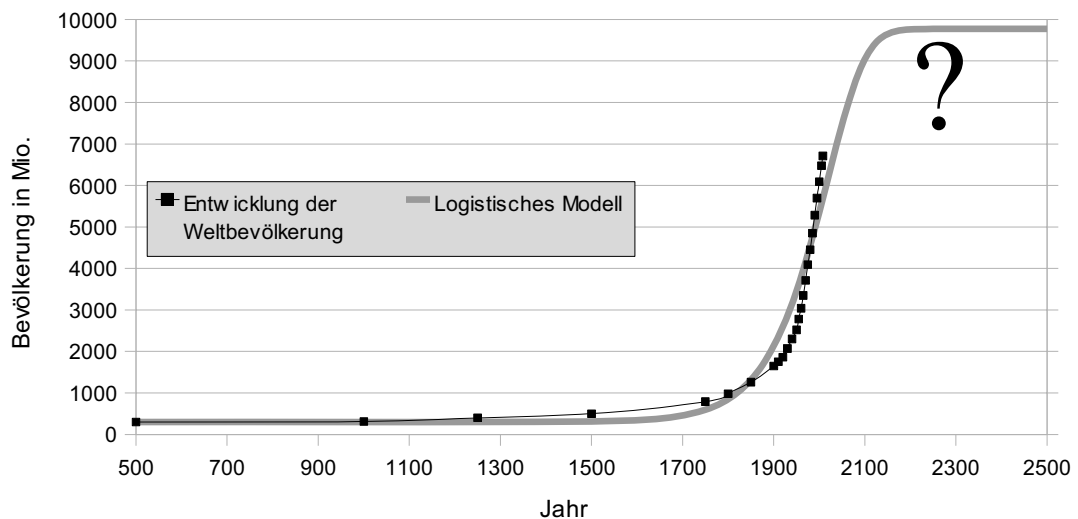


Abb. 41

Aufgrund dieser Erkenntnisse erscheint die Anwendung des Modells auf die Entwicklung der Menschheit gerechtfertigt.

<sup>17</sup> D. L. Meadows u.a.: Wachstum bis zur Katastrophe?. München, 1976. S. 17.

<sup>18</sup> Aus: Bundeszentrale für politische Bildung. Internetseite: <http://www.bpb.de/wissen/I6T8RL,0,0,Bev%F6lkerungswachstum.html> ohne Datum, aufgerufen am 24.1.2008.

## 4.1 Rückschluss auf die Parameter aus simulierten Daten

### 4.1.1 Berechnung eines Parameters: r

Um das logistische Modell auf die Entwicklung der Erdbevölkerung anwenden zu können, ist es notwendig, die beiden Parameter  $r$  und  $Z_{max}$  so zu bestimmen, dass sie die vergangene Entwicklung möglichst realistisch nachbilden. Das Vorgehen bei der Bestimmung dieser Parameter aus bekannten Informationen über die Entwicklung einer Population wird zuerst mit Datensätzen aus Bevölkerungsentwicklungen, die mit dem logistischen Modell simuliert wurden, gezeigt werden. Wenn dieses Vorgehen erfolgreich ist, d. h. wenn nur aus der Anzahl der Populationsmitglieder zu verschiedenen Zeitpunkten die Parameter bestimmen werden können, mit denen ihre Entwicklung simuliert wurde, werden statt der simulierten, optimal logistischen Datensätze reale Datensätze verwendet.

Das Verfahren soll anhand der normierten logistischen Gleichung (II) vorgestellt werden.  $Z_{max}$  ist in diesem Fall bekannt, da es auf 1 normiert ist. Folgendes Ergebnis erhält man nach einer Umformung der Gleichung nach  $r$ :

$$r = \frac{x_{n+1}}{x_n - x_n^2} \quad (\text{XIV})$$

Ein Datensatz der normierten logistischen Gleichung, der mit  $r=1,4$  erstellt wurde, befindet sich in Tabelle I im Anhang. Offensichtlich erhält man beim Einsetzen zweier beliebiger Wertepaare aus der Tabelle in Gleichung XIV jedes Mal das (schon bekannte) Ergebnis  $r=1,4$ . Die Information über diesen Parameter ist anscheinend in jedem einzelnen Wertepaar eindeutig enthalten und kann aus diesem zurückgewonnen werden. Die Ungenauigkeit in der 6. Nachkommastelle resultiert aus der Tatsache, dass für  $x_n$  und  $x_{n+1}$  gerundete Werte verwendet werden.

$x_n$	$x_{n+1}$	$r$
0,010000	0,013860	$r = \frac{x_{n+1}}{x_n - x_n^2} = \frac{0,013860}{0,010000 - 0,010000^2} = 1,400000$
0,013860	0,019135	$r = \frac{x_{n+1}}{x_n - x_n^2} = \frac{0,019135}{0,013860 - 0,013860^2} = 1,399996$
0,265050	0,272718	$r = \frac{x_{n+1}}{x_n - x_n^2} = \frac{0,272718}{0,265050 - 0,265050^2} = 1,400001$
0,285684	0,285696	$r = \frac{x_{n+1}}{x_n - x_n^2} = \frac{0,285696}{0,285684 - 0,285684^2} = 1,399999$

#### 4.1.2 Berechnung beider Parameter: r und $Z_{max}$

Nun stellt sich die Frage, ob die Information über  $Z_{max}$  in einem Datensatz, der mit der nicht normierten Form der Gleichung (I) erstellt wurde, ebenfalls enthalten ist. Man könnte dann mit zwei Gleichungen aus zwei verschiedenen Wertepaaren die beiden Parameter berechnen. Die Vorgehensweise dazu ist folgende: Es werden zwei verschiedene logistische Gleichungen aufgestellt:

$$Z_{n+1} = r * Z_n * \left(1 - \frac{Z_n}{Z_{max}}\right) \quad \text{bzw.} \quad Z_{m+1} = r * Z_m * \left(1 - \frac{Z_m}{Z_{max}}\right) \quad (\text{XV})$$

Durch Umformung der beiden Gleichungen nach  $Z_{max}$  erhält man

$$Z_{max} = \frac{r * Z_n^2}{r * Z_n - Z_{n+1}} \quad \text{bzw.} \quad Z_{max} = \frac{r * Z_m^2}{r * Z_m - Z_{m+1}} \quad (\text{XVI})$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich gleichsetzen und nach r umformen:

$$\frac{r * Z_n^2}{r * Z_n - Z_{n+1}} = \frac{r * Z_m^2}{r * Z_m - Z_{m+1}}$$

$$r = \frac{Z_n^2 * Z_{m+1} - Z_{n+1} * Z_m^2}{Z_n * Z_m * (Z_n - Z_m)} \quad (\text{XVII})$$

##### 4.1.2.1 Überprüfung der Qualität der berechneten Parameter

Die Vorgehensweise ist nun ähnlich wie in 4.1.1: Es werden simulierte Werte aus Tabelle IV, die mit  $r = 1,4$  und  $X = 63314$  erzeugt wurden, in die Gleichungen XVII und XVI eingesetzt, um zu überprüfen, ob und mit welcher Genauigkeit die beiden Parameter reproduzierbar sind. Hier werden als Beispiel folgende Daten verwendet:

$$Z_n = Z_{10} = 57,723582 \quad Z_{n+1} = Z_{11} = 80,739338 \quad Z_m = Z_{12} = 112,890928 \quad Z_{m+1} = Z_{13} = 157,765496$$

Für r erhält man gemäß XVII folgenden Wert:

$$r = \frac{57,723582^2 * 157,765496 - 80,739338 * 112,890928^2}{57,723582 * 112,890928 * (57,723582 - 112,890928)} = 1,400000$$

$Z_{max}$  kann jetzt mit XVI berechnet werden:

$$Z_{max} = \frac{1,4 * 57,723582^2}{1,4 * 57,723582 - 80,739338} = 63314,59$$

Auch hier zeigt sich, dass r und  $Z_{max}$  aus beliebigen Werten der Tabelle reproduzierbar sind.

Der Spezialfall  $Z_{n+1}=Z_m$ , also die Berechnung mit drei statt vier Werten, führt ebenfalls zu einem korrekten Ergebnis. Diese Rechnung kann analog zur oben vorgeführten Methode gleichfalls mit beliebigen Werten aus Tabelle VI durchgeführt werden, zum Beispiel für

$$Z_n=Z_{24}=5087,223986 \quad Z_{n+1}=Z_m=Z_{25}=6549,858043 \quad Z_{m+1}=Z_{26}=8221,181737$$

Durch Einsetzen dieser Werte in XVII und XVI erhält man

$$r=1,400000 \quad \text{und} \quad Z_{max}=63313,9999$$

Selbst ein höherer Abstand zwischen den einzelnen Wertepaaren liefert ein brauchbares Ergebnis, wie folgende Rechnung zeigt:

$$Z_n=Z_8=29,483741 \quad Z_{n+1}=Z_9=41,258016 \quad Z_m=Z_{28}=11803,305073 \quad Z_{m+1}=Z_{29}=13444,025420$$

Daraus folgt durch Einsetzen in XVII und XVI

$$r=1,400000 \quad \text{und} \quad Z_{max}=63315,23$$

Die Beispiele, die hier gezeigt werden, sind zwar kein Beweis der Behauptung, dass die Information über die beiden Parameter des logistischen Systems in drei oder vier Werten enthalten ist. Die Vermutung wurde aber im Rahmen dieser Arbeit an vielen Beispielen überprüft und hat sich dabei bewährt.

#### 4.1.2.2 Konsequenzen aus der Möglichkeit der Berechnung der Parameter

Hier sollte angemerkt werden, dass die vollständige Entwicklung einer logistischen Population bekannt ist, sobald entweder

die Größe der Population zu drei verschiedenen Zeitpunkten, die die Bedingung  $Z_n, Z_{n+1}=Z_m, Z_{m+1}$  erfüllen (also Werte aus drei direkt aufeinander folgenden Iterationen)

oder

die Größe der Population zu vier verschiedenen Zeitpunkten, die die Bedingung  $Z_n, Z_{n+1}, Z_m, Z_{m+1}$  erfüllen (vier Werte aus Iterationen, von denen je zwei direkt aufeinander folgen)

bekannt ist. Denn wie oben gezeigt wird, können aus diesen Größen die beiden Parameter reproduziert werden. Mit Kenntnis der Parameter kann dann die Iteration nach dem logistischen Modell mit einem beliebig kleinen Startwert durchgeführt werden. Daraufhin ist die zeitliche Einordnung der berechneten Werte durch Vergleich mit den drei bzw. vier

bekanntes Größen möglich.

In nur drei bzw. vier Werten steckt also die Information über die gesamte Geschichte einer simulierten Population, über deren Vergangenheit und Zukunft.

#### 4.1.2.3 Auswirkung des Abstands der Werte auf die Berechnung der Parameter

Bevor das logistische Modell in der Art, die sich oben bewährt hat, auf die Entwicklung der Weltbevölkerung angewandt werden kann, muss noch ein weiterer Faktor untersucht werden: Die Auswirkung des Abstands der einzelnen Werte in den Wertepaaren auf die Bestimmung der Parameter. Denn im Gegensatz zu dem simulierten Modell, in dem der Abstand zwischen zwei Werten durch genau eine Iteration bestimmt wird, ist diese Unterteilung in diskrete Schritte bei der Entwicklung der Weltbevölkerung nicht möglich, da die Aufnahme der Daten im Abstand von einem Jahr willkürlich geschieht.

Wie wirkt es sich nun auf die Bestimmung der Parameter aus, wenn für die Berechnung Werte verwendet werden, die nicht aus jeweils unmittelbar aufeinander folgenden Iterationsschritten stammen? Es erscheint plausibel, dass die Berechnung mit Wertepaaren der Form  $\{Z_n | Z_{n+i}\}$  und  $\{Z_m | Z_{m+i}\}$  ebenfalls zu einem korrekten Ergebnis führen könnte, denn so, wie sich eine Gerade durch zwei und eine Parabel durch drei beliebige Punkte eindeutig definieren lassen, müsste sich auch eine logistische Funktion durch drei bzw. vier Werte eindeutig definieren lassen, ohne sich auf einen bestimmten Abstand der beiden Werte der Wertepaare festzulegen. Als Einschränkung fällt nur auf, dass der Abstand der beiden Werte der Wertepaare (i) gleich sein muss, da bei unterschiedlichem Abstand das Einsetzen der Werte in Gleichung XV zu zwei unterschiedlichen Wachstumsfaktoren  $r$  führen würde. Denn  $r$  ist verständlicherweise zwischen zwei Werten, die weiter auseinander liegen, größer als  $r$  zwischen zwei näheren Werten, da diese einen geringeren Unterschied haben. Deshalb ist auch das Ergebnis, das man bei der Berechnung mit Werten mit einem größeren Abstand als eine Iteration erhält, sicherlich nur insofern richtig, dass die Kurve, die aus den berechneten Parametern resultiert, den gleichen Verlauf zeigt und sich der gleiche Sättigungswert einstellt wie im simulierten Modell.  $r$  und daraus folgend auch  $Z_{max}$  (siehe XVI) haben einen anderen Wert als im simulierten Modell.

Folgendes Ergebnis erhält man für die Parameter, wenn Werte der Tabelle I mit dem Abstand 2 (i=2) in XVII und XVI eingesetzt werden:

$$Z_0=0,010000 \quad Z_2=0,019135 \quad Z_4=0,035820 \quad Z_6=0,064420$$

$$r=1,958064 \quad Z_{max}=0,439386$$

Diese Werte stimmen nun nicht mit denen überein, die zur Simulation verwendet wurden ( $r=1,4$  und  $Z_{max} = 1$ , da es sich um das normierte Modell handelt). Dies wurde aber oben vorausgesagt und begründet. Es stellt sich allerdings die Frage, ob sich trotz unterschiedlicher Parameter der gleiche Sättigungswert einstellt, denn dann wäre die Näherung durch die neuen, oben berechneten Parameter vertretbar. Folgender Wert ist der Sättigungswert, den man für das Modell erhält:

$$\overset{\circ}{Z} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) * Z_{max} = \left(1 - \frac{1}{1,958064}\right) * 0,439386 = 0,214988 \quad 19$$

Dieser Sättigungswert liegt deutlich unter dem Sättigungswert des simulierten Modells (0,285714). In diesem Fall versagt die Näherung mit dem oben gezeigten Verfahren.

Folgende analoge Berechnungen mit Werten der selben Tabelle zeigen, dass mit größerem  $i$  noch ungenauere Ergebnisse für den Sättigungswert erreicht werden:

$$i=3: Z_0=0,010000 \quad Z_3=0,026276 \quad Z_6=0,064420 \quad Z_9=0,135048$$

$$\rightarrow r=2,725217 \quad Z_{max}=0,279174 \quad \overset{\circ}{Z}=0,176733$$

$$i=4: Z_0=0,010000 \quad Z_4=0,035820 \quad Z_8=0,108162 \quad Z_{12}=0,216765$$

$$\rightarrow r=3,742747 \quad Z_{max}=0,232835$$

Für  $i=3$  ist der Sättigungswert noch weiter von dem bekannten Sättigungswert der simulierten Daten entfernt. Die Berechnung für  $i=4$  liefert keinen Sättigungswert mehr, da sich das System für  $r=3,7\dots$  im chaotischen Bereich befindet.

Diese Feststellung -die Abhängigkeit der Berechnung der Parameter vom Abstand der Werte- erweckt den Eindruck, dass die Anwendung des logistischen Modells auf die Entwicklung der Weltbevölkerung nicht vertretbar ist. Allerdings lässt sich diese Ungenauigkeit erklären und es gibt eine Möglichkeit, diese zu minimieren.

Die wachsende Ungenauigkeit der Ergebnisse resultiert daraus, dass für ihre Berechnung die einfach iterierte Form  $f(x_n)$  (III) verwendet wird, und nicht  $f^i(x_n)$  (siehe V), die bei dem Abstand  $i$  der Werte erforderlich wäre.  $f(x_n)$  ist bei  $i=2$  schon eine ungenaue Näherung, für wachsende  $i$  verliert sie ihre Genauigkeit immer weiter<sup>20</sup>. Nun führt aber folgende Überlegung weiter: Bei kleinem  $r$  wachsen die Werte durch die Iteration nur langsam. Daher ist der Unterschied auch zwischen zwei Werten, die nicht direkt aufeinander folgen, relativ klein. Für

19 Zur Herleitung der Formel für den Sättigungswert/Fixpunkt siehe Anhang

20 Um die Genauigkeit der Näherung zu verbessern, könnte also bei der Bestimmung der Gleichungen XVI und XVII von  $f^i(x_n)$  ausgegangen werden. Die Lösung der höhergradigen Polynome, die dabei entstehen, ist aber mit größerem Aufwand verbunden.



kleine  $r$  könnte also die Näherung durch die einfache Iteration  $f(x_n)$  auch für größere Abstände zwischen den Werten vertretbar werden. Folgende Beispiele erläutern dies:

Die Berechnungen werden mit Werten, die mit dem normierten Modell und  $r=1,1$  erstellt wurden (siehe Tabelle II), durchgeführt.

$$i=2: Z_0=0,010000 \quad Z_2=0,011849 \quad Z_4=0,013984 \quad Z_6=0,016431$$

$$\rightarrow r=1,209785 \quad Z_{max}=0,486145 \quad \overset{\circ}{Z}=0,084301$$

$$i=3: Z_0=0,010000 \quad Z_3=0,012879 \quad Z_6=0,016431 \quad Z_9=0,020723$$

$$\rightarrow r=1,329397 \quad Z_{max}=0,320363 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0793793$$

$$i=4: Z_0=0,010000 \quad Z_4=0,013984 \quad Z_8=0,019208 \quad Z_{12}=0,025773$$

$$\rightarrow r=1,459885 \quad Z_{max}=0,237438 \quad \overset{\circ}{Z}=0,074796$$

Hier zeigt sich schon eine deutlich höhere Genauigkeit als bei der Berechnung, die mit den Werten aus Tabelle I vorgenommen wurde: Für  $i=2$  beträgt der Sättigungswert 93% des tatsächlichen Wertes (0,090909), für  $i=3$  87% und für  $i=4$  82%. Oben wurde bei  $i=2$  75% des tatsächlichen Sättigungswertes errechnet, bei  $i=3$  62%,  $i=4$  lieferte kein Ergebnis mehr.

Die analoge Berechnung mit Werten der Tabelle III (normiertes Modell,  $r=1,02$ ) liefert noch genauere Näherungen des Sättigungswertes (0,0196078431):

$$i=2: Z_0=0,0100000000 \quad Z_2=0,0101959510 \quad Z_4=0,0103916279 \quad Z_6=0,0105868748$$

$$\rightarrow r=1,0401818457 \quad Z_{max}=0,5052677396 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0195183087$$

$$i=3: Z_0=0,0100000000 \quad Z_3=0,0102938335 \quad Z_6=0,0105868748 \quad Z_9=0,0108786018$$

$$\rightarrow r=1,0605282367 \quad Z_{max}=0,3405143989 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0194344058$$

$$i=4: Z_0=0,0100000000 \quad Z_4=0,0103916279 \quad Z_8=0,0107815374 \quad Z_{12}=0,0111685010$$

$$\rightarrow r=1,0810222177 \quad Z_{max}=0,2582505968 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0193557873$$

$$i=7: Z_0=0,0100000000 \quad Z_7=0,0106842888 \quad Z_{14}=0,0113605037 \quad Z_{21}=0,0120223058$$

$$\rightarrow r=1,1432117408 \quad Z_{max}=0,1528708220 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0191503426$$

$$i=9: Z_0=0,0100000000 \quad Z_9=0,0108786018 \quad Z_{18}=0,0117408285 \quad Z_{27}=0,0125736704$$

$$\rightarrow r=1,1850819876 \quad Z_{max}=0,1218946672 \quad \overset{\circ}{Z}=0,0190370856$$

$$i=14: Z_0=0,0100000000 \quad Z_{14}=0,0113605037 \quad Z_{28}=0,0126638847 \quad Z_{42}=0,0138668717$$

$$\rightarrow r=1,2901743408 \quad Z_{max}=0,0837101675 \quad \dot{Z}=0,0188273336$$

$$i=20: Z_0=0,0100000000 \quad Z_{20}=0,0119288723 \quad Z_{40}=0,0137024619 \quad Z_{60}=0,0152195093$$

$$\rightarrow r=1,4148307385 \quad Z_{max}=0,0637473359 \quad \dot{Z}=0,0186908255$$

Hier zeigt sich, dass der tatsächliche Sättigungswert zu 99,5% bei  $i=2$  erreicht wird. Die Genauigkeit sinkt kontinuierlich mit wachsendem  $i^{21}$  auf 97,1% bei  $i=9$  und 95,3% bei  $i=20$ . Eine Abweichung von wenigen Prozent scheint durchaus vertretbar.

Da, wie oben vorhergesagt, der *Sättigungswert* der Simulation auch mit den berechneten, von der Simulation abweichenden Parametern gut angenähert werden kann, ist nun zu prüfen, ob die These zutrifft, dass zusätzlich der zeitliche *Verlauf* des Systems mit den neuen Parametern näherungsweise beschrieben werden kann. Hierzu werden mit  $I$  mehrere Iterationen mit den für  $i=9$  berechneten Parametern  $r=1,1850819876$ ,  $Z_{max}=0,1218946672$  und dem Startwert 0,01 durchgeführt. Man erhält folgendes Ergebnis:

Iteration	Berechnete Populationsgröße	Entspricht Iteration in der Simulation (Tabelle III)	Populationsgröße in der Simulation (Tabelle III)
0	0,010000	0	0,0100000000
1	0,010879	9	0,0108786018
2	0,011741	18	0,0117408285
3	0,012574	27	0,0125736704
4	0,013364	36	0,0133658638
5	0,014101	45	0,0141084294
6	0,014778	54	0,0147949527

Die geringfügig niedrigeren Ergebnisse der Berechnung sind auf den abweichenden Sättigungswert zurückzuführen, der, wie oben beschrieben, bei 97,1% des Sättigungswertes der Simulation liegt. Man stellt nun fest, dass mit den berechneten Parametern die Entwicklung der Simulation aus Tabelle III ausgezeichnet in 9er-Zeitschritten beschrieben wird – was nicht anders zu erwarten war, da für die Berechnung der Parameter  $i=9$  gewählt wurde.

<sup>21</sup> Man stellt fest, dass für manche Beispiele die Genauigkeit der Näherung wieder zunimmt, wenn  $i$  sehr groß wird. Denn dies führt dazu, dass sich die vier Werte auf den gesamten Bereich der logistischen Funktion verteilen und sich ein Wert deutlich im Sättigungsbereich befindet. Gleichzeitig darf der Wachstumsfaktor aber nicht in den chaotischen Bereich wachsen.

#### 4.1.2.4 Ähnlichkeit der Simulation mit der Entwicklung der Weltbevölkerung

Aus den Resultaten, die aus obigem Beispiel gewonnen wurden, lässt sich schlussfolgern, dass ein höherer Abstand der Werte bei geringem  $r$  durchaus vertretbar ist. Wie groß ist dieser Wachstumsfaktor nun bei der Entwicklung der Weltbevölkerung? Eine einfache Abschätzung erhält man durch die Betrachtung des jährlichen prozentualen Wachstums. Dieses entspricht zwar nicht dem Wachstumsfaktor  $r$ , es ist aber vor allem in der frühen Entwicklung einer Population eine akzeptable Näherung von  $r-1$ . (Im logistischen Modell ist die jährliche prozentuale Wachstumsrate immer kleiner als  $r-1$ , da das tatsächliche Wachstum durch den hemmenden Faktor verringert wird.) Folgende Daten der jährlichen Wachstumsraten der Weltbevölkerung liegen vor:

1950: 1,47% 1962: 2,20% 1986: 1,74% 2008: 1,17%<sup>22</sup>

Es zeigt sich, dass das prozentuale Wachstum der Weltbevölkerung in der Größenordnung mit dem des logistischen Modells in Tabelle III vergleichbar ist. Dieses hat zwischen der ersten und der zweiten Iteration ein Wachstum von ca. 1,0%; es nimmt bis zur 30. Iteration auf ca. 0,7% ab (vgl. Tabelle I: 38,6% / Tabelle II: 8,9% Wachstum zwischen erster und zweiter Iteration). Da die Parameter aus dieser Simulation gut mit dem oben gezeigten Verfahren angenähert werden konnten und das Wachstum in der Simulation in etwa mit dem der Weltbevölkerung vergleichbar ist, kann man für die Bestimmung der Parameter aus Daten der Weltbevölkerung ein ähnlich gutes Ergebnis erwarten – wenn ihre Entwicklung näherungsweise dem logistischen Modell entspricht.

---

<sup>22</sup> Aus: U. S. Census Bureau, International Data Base. Internetseite:  
<http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpop.html> vom 15.12.2008, aufgerufen am 23.1.2008.

## 4.2 Rückschluss auf die Parameter aus realen Daten

In dem Essay „The World at Six Billion“, der kurz vor der Jahrtausendwende veröffentlicht wurde, gehen die Vereinten Nationen von einer Stabilisierung der Weltbevölkerungszahl bei knapp über zehn Milliarden im Jahre 2200 aus.<sup>23</sup> Sicherlich wurde diese Berechnung mit großem Aufwand durchgeführt und viele politische, gesellschaftliche und wirtschaftliche Faktoren wurden dabei berücksichtigt. Die Ergebnisse, die in 4.1 gefunden wurden, legen nun aber die Vermutung nahe, dass es ohne großen Aufwand und ohne Betrachtung anderer Faktoren als der bisherigen Bevölkerungsentwicklung möglich ist, eine Prognose über die weitere Entwicklung der Weltbevölkerung abzugeben. Die soll hier nun gezeigt werden.

Der Berechnung wird die Entwicklung der Weltbevölkerung in den letzten 15 Jahren zu Grunde gelegt:

1993: ca. 5534 Millionen (=Z<sub>n</sub>)

1998: ca. 5937 Millionen (=Z<sub>n+1</sub>)

2003: ca. 6322 Millionen (=Z<sub>m</sub>)

2008: ca. 6711 Millionen (=Z<sub>m+1</sub>)

Bei dem Einsetzen dieser Werte aus Tabelle V in die Gleichungen XVII und XVI erhält man

$$r \approx 1,15251275907694 \quad Z_{max} \approx 80.045.183.956$$

Daraus folgt

$$\overset{\circ}{Z} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) * Z_{max} = 10.592.426.115 .$$

Der Sättigungswert bei knapp über 10 Milliarden, den die Vereinten Nationen annehmen, kann mit dem Modell gut bestätigt werden.

Berechnungen, denen andere Daten zu Grunde liegen, finden sich im Anhang. Dabei fällt auf, dass sich nicht alle Prognosen so nahe am UN Modell befinden, wie das oben gezeigte Beispiel. Manche Modelle versagen auch völlig, so liefert zum Beispiel die Berechnung auf Grundlage der Daten von 1950, 1960, 1970 und 1980 ein negatives  $Z_{max}$ . Dies ist sicherlich darauf zurückzuführen, dass das postulierte optimale logistische Wachstum in der Vergangenheit durch viele verschiedene Einflüsse gestört wurde – beispielsweise Seuchen, Kriege oder den Fortschritt der Medizin. Wenn für die Berechnung Bevölkerungszahlen verwendet werden, die unmittelbar durch ein solches Ereignis beeinflusst wurden, versagt das Modell des logistischen Wachstums.

<sup>23</sup> Aus: Internetseite: <http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbilpart1.pdf> S.3, ohne Datum, aufgerufen am 21.1.2008

Allerdings zeichnet sich im Gesamtdurchschnitt der Szenarien eine Sättigung um 10 Milliarden ab – vor allem, wenn man bei der Bestimmung des Durchschnitts diejenigen Modelle außer Acht lässt, die offensichtlich falsch sind: Die mit negativem  $Z_{max}$  oder die, bei denen sich eine Sättigung erst im hohen zweistelligen Milliardenbereich einstellt. Die Berechnungen im Anhang zeigen auch, dass sich meist nur bei einer ungünstigen Wahl der Daten, die der Berechnung zu Grunde gelegt werden, ein unrealistischer Sättigungswert einstellt. Außerdem existiert ein weiteres Kriterium, das eine Aussage über die Qualität der Prognose liefert: In 4.1.2.3 wurde festgestellt, dass ein niedriges  $i$  die Genauigkeit der Näherung verbessert. Dieses wird, wie oben beschrieben, durch den Abstand der Werte eines Wertepaars bestimmt. Ein Abstand der Werte von bis zu 20 Jahren erscheint vertretbar, da dies meist zu einem  $r$  unter 1,5 führt, was unter Berücksichtigung der Ergebnisse von 4.1.2.3 für eine akzeptable Näherung spricht. Vermutlich ist aber auch ein zu enger Abstand zwischen den einzelnen Werten ungünstig, da dadurch kurzfristige Schwankungen und Unregelmäßigkeiten in der Bevölkerungszahl, die durch einzelne Ereignisse ausgelöst wurden, einen großen Einfluss entwickeln können. Ein Abstand von fünf bis zehn Jahren erscheint unter Berücksichtigung dieser beiden Überlegungen für eine Prognose am geeignetsten. Dies führt aber auch dazu, dass Prognosen nur auf Grundlage der Daten nach 1900 abgegeben werden können, da die Daten zur Bevölkerungsentwicklung für die Zeit vor 1900 in zu großen Zeitschritten vorliegen. Die Beobachtung aus 4.1.2.3, dass sich bei größerem Abstand der Werte im berechneten Modell kleinere Sättigungswerte als im simulierten Modell ergeben, sollte ebenfalls in die Interpretation der Ergebnisse einbezogen werden.

### 4.3 Anwendung des Modells

Da nun verschiedene Paare von  $r$  und  $Z_{max}$  bekannt sind, die eine Näherung der Entwicklung der Weltbevölkerung sein könnten, lässt sich das logistische Modell nun einerseits auf die Vergangenheit anwenden, um zu überprüfen, in wie weit es sich mit der Realität deckt, andererseits auch auf die zukünftige Entwicklung.

#### 4.3.1 Vergleich mit vergangener Entwicklung

Um die Anwendung des logistischen Modells vom heutigen Zeitpunkt aus in die umgekehrte Richtung zu vermeiden, wird mit einem Startwert von 2 Personen zu einem unbekanntem Zeitpunkt gerechnet. Wenn dann durch Iterationen die heutige Bevölkerungszahl erreicht ist, kann durch Multiplikation der Anzahl der Iterationen mit dem Zeitschritt pro Iteration auf den Zeitpunkt rückgeschlossen werden, an dem – im Modell – die Menschheit entstanden ist.

Im Anhang finden sich die Daten der Simulation mit den oben ermittelten Parametern  $r = 1,15251275907694$  und  $Z_{max} = 80.045.183.956$ .

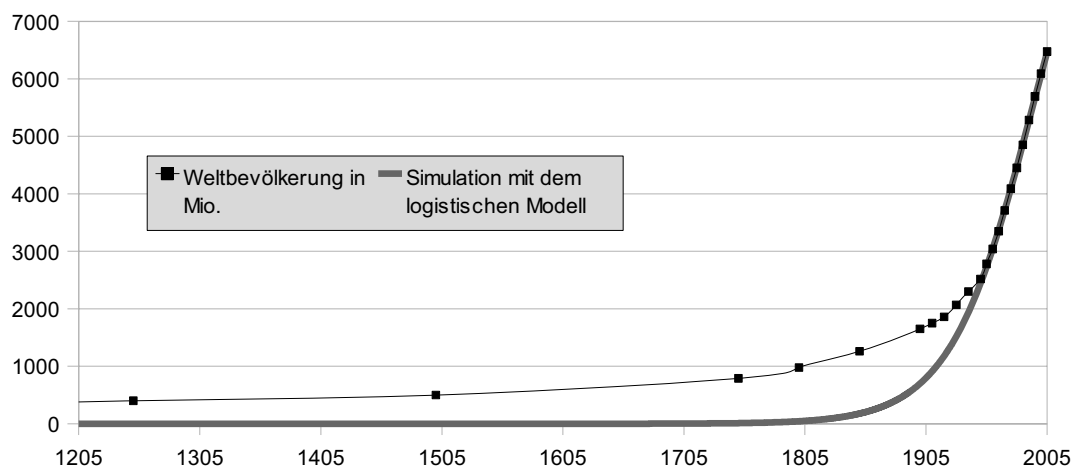


Abb. 42: Logistisches Modell mit den oben ermittelten Parametern

Die Bevölkerung von 6464 Millionen, die ungefähr der Weltbevölkerungszahl im Jahr 2005 entspricht, erhält man nach 160 Iterationen. Da im obigen Beispiel die Parameter  $r$  und  $Z_{max}$  mit Werten im Abstand von fünf Jahren ermittelt wurden, entsprechen 160 Iterationen einem Zeitraum von 800 Jahren. Die ersten beiden Menschen entstanden somit im Jahre 1205: Das römische Reich, Sokrates und Jesus haben nie existiert – im Modell. Anscheinend ist das logistische Modell in Verbindung mit den gewählten Parametern nicht geeignet, um die Frühgeschichte der Menschheit zu beschreiben. Anders sieht es aber mit der jüngeren Entwicklung aus: Für das Jahr 1950 gibt das Modell eine Bevölkerungszahl von 2441 Millionen Menschen an, was der Realität (2556 Millionen) relativ nahe kommt, genauso wie 1975: Im Modell 4085 Millionen, in der Realität 4089 Millionen.

Da dieses Modell auf Basis der Daten von 1993, 1998, 2003 und 2008 nun die Entwicklung in den letzten Jahrzehnten relativ gut beschreibt, kann davon ausgegangen werden, dass die Prognose, die mit diesem Modell für die kommenden Jahrzehnte abgegeben werden kann, eine ähnliche Genauigkeit hat. Diese Prognose wird im folgenden Abschnitt erstellt.

### 4.3.2 Prognose der zukünftigen Entwicklung

Für die Jahre 2005 bis 2200 erhält man mit den oben berechneten Parametern folgende Prognose (siehe auch Tabelle VI im Anhang):

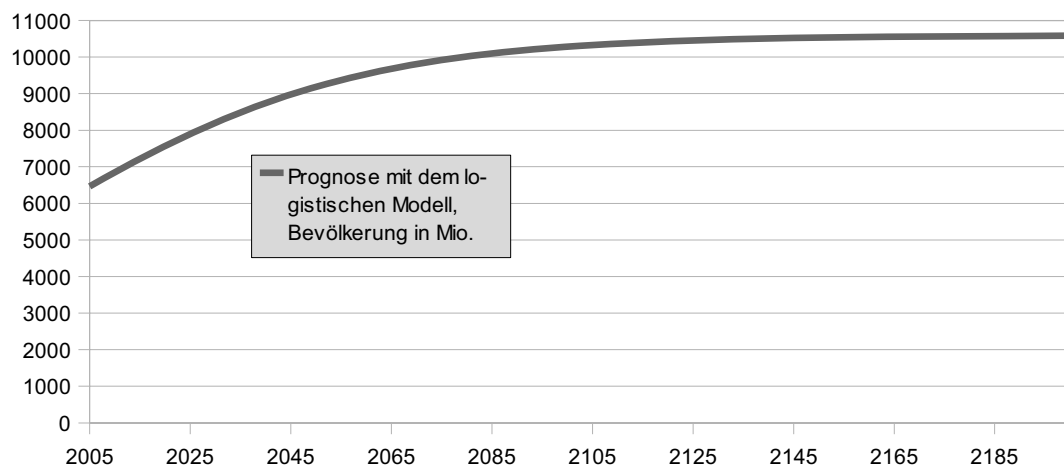


Abb. 43: Prognose der Bevölkerungsentwicklung mit den oben ermittelten Parametern

Die Weltbevölkerung überschreitet in diesem Modell die Grenze von 8 Milliarden kurz nach 2025, 9 Milliarden zwischen 2045 und 2050 und erreicht 10 Milliarden vor 2080. Der Sättigungswert ist um 2150 fast erreicht, dann beträgt die Zahl der Menschen 10,53 Milliarden und steigt laut Modell nicht über den Sättigungswert von 10,59 Milliarden.

Diese Ergebnisse sollen nun mit zwei verschiedenen Prognosen der Vereinten Nationen verglichen werden.

- In der UN-Prognose „World Population Prospects, the 2006 Revision“<sup>24</sup> werden folgende Daten angegeben:

2025: 8011 Millionen                      2050: 9191 Millionen

- In „The world at Six Billion“ aus dem Jahr 1999 gehen die Vereinten Nationen von folgender Entwicklung aus: „World population is projectet to cross the 7 billion mark in 2013; the 8 billion mark in 2028; the 9 billion mark in 2054. World population nearly stabilizes at just above 10 billion after 2200.“<sup>25</sup>

Im Vergleich mit den beiden UN-Prognosen fällt die hohe Übereinstimmung mit der Prognose mit dem logistischen Modell auf.

---

24 Vereinte Nationen: „World population prospects. The 2006 revision“. S.62. Internetseite: [http://www.un.org/esa/population/publications/wpp2006/WPP2006\\_Highlights\\_rev.pdf](http://www.un.org/esa/population/publications/wpp2006/WPP2006_Highlights_rev.pdf) ohne Datum, aufgerufen am 22.1.2008.

25 Vereinte Nationen: „The world at six billion“. S.3. Internetseite: <http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbilpart1.pdf> ohne Datum, aufgerufen am 22.1.2008.



## 5. Nichtlinearität in der Erdatmosphäre

Neben der Möglichkeit der Prognose der Bevölkerungsentwicklung lässt sich in meinen Augen noch ein weiterer realitätsbezogener Aspekt des logistischen Modells erkennen: Es könnte ein Muster für viele andere Abläufe in unserer Umwelt sein.

Das logistische Modell ist nämlich ein einfaches Beispiel, an dem das Verhalten von nichtlinearen Systemen studiert werden kann. Diese nichtlinearen Systeme sind im Universum allgegenwärtig: Nicht nur die Ausbreitung von Sahne in unserer Kaffeetasse am Morgen oder die Verwirbelung der Luft hinter unseren Flugzeugen sind nichtlinear, sondern auch Vorgänge in der Erdatmosphäre. Das Klima ist wohl das nichtlineare System, das vor allem in der jüngsten Vergangenheit für am meisten Diskussionen gesorgt hat.

In der Natur eines jeden nichtlinearen Systems liegt die Existenz von stabilen oder instabilen Fixpunkten, deren Stabilität von Parametern bestimmt wird. Dies geschieht im logistischen Modell durch einen einzigen Parameter:  $r$ . Das klimatische System unseres Planeten besitzt sicherlich viel mehr als nur einen Parameter, die sich auf die Stabilität seiner unzähligen Attraktoren und Repellen auswirken. Die Parameter konnten früher zum Glück durch den Menschen nicht nennenswert beeinflusst werden. Heute ändert sie der Mensch allerdings munter. Zu den Parametern gehören sicherlich unter anderem die Bedeckung der Erde mit Wald oder die chemische Zusammensetzung der Atmosphäre oder von Gewässern. Nun werden Regenwälder abgeholzt, die Luft wird mit Gasen belastet und die Meere mit Chemikalien verschmutzt. Die Auswirkungen davon kann niemand abschätzen. Allerdings erhält man einen Eindruck vom möglichen Ausmaß der Auswirkungen durch einen Blick auf das Verhalten des logistischen Modells: Dort kann die winzige Änderung des Parameters zum Beispiel einen stabilen Zyklus beenden.

Auf das Klima der Erde übertragen, bedeutet das nichts Gutes: Stabile Zyklen sind dort zum Beispiel in Strömungen in der Atmosphäre oder im Meer allgegenwärtig. Wenn nun irgendjemand sagt, eine kleine Änderung der Parameter, so wie sie gerade durch den Menschen geschieht, habe auch nur eine kleine Auswirkung auf die Entwicklung des Klimas, so widerspricht das logistische Modell dieser Aussage deutlich.

## 6. Anhang

Zu 3.1: Logistisches System für  $r=-2$

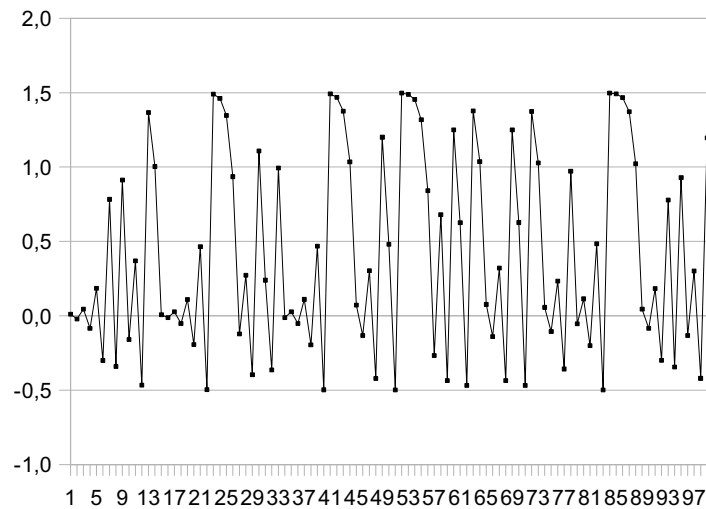


Abb. 44: Logistisches System für  $r=-2$

Zu 3.3.1 und 4.2: Berechnung der Fixpunkte der ersten Iteration der logistischen Gleichung in allgemeiner und normierter Form

Lösung der Gleichung  $f(\overset{\circ}{Z}) = \overset{\circ}{Z}$  nach  $\overset{\circ}{Z}$ :

$$r * \overset{\circ}{Z} * \left(1 - \frac{\overset{\circ}{Z}}{Z_{max}}\right) = \overset{\circ}{Z}$$

$$r * \overset{\circ}{Z} - \frac{\overset{\circ}{Z}^2 * r}{Z_{max}} - \overset{\circ}{Z} = 0$$

$$\frac{-r}{Z_{max}} * \overset{\circ}{Z}^2 + (r - 1) * \overset{\circ}{Z} = 0$$

$$\overset{\circ}{Z}_{1,2} = \frac{-(r-1) \mp \sqrt{(r-1)^2}}{2 * \frac{-r}{Z_{max}}}$$

$$\overset{\circ}{Z}_{1,2} = \frac{-r+1 \mp (r-1)}{2 * \frac{-r}{Z_{max}}}$$

$$\overset{\circ}{Z}_1 = 0$$

$$\overset{\circ}{Z}_2 = \frac{-2 * r + 2}{-2 * r} * Z_{max} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) * Z_{max}$$

Analog dazu erhält man als Fixpunkte der normierten Gleichung  $f(\hat{x}) = r * \hat{x} * (1 - \hat{x})$

$$\hat{x}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \hat{x}_2 = 1 - \frac{1}{r}$$

Zu 3.4.2: Zur Herleitung von  $f^2(x_n)$ :

$f^2(x_n)$  (V) soll hierzu abgeleitet werden.

$$f^2(x_n) = r * (r * x_n * (1 - x_n)) * (1 - (r * x_n * (1 - x_n)))$$

$$f^2(x_n) = (r^2 * x_n - r^2 * x_n^2) * (1 - r * x_n + r * x_n^2)$$

$$f^2(x_n) = r^2 * x_n - r^3 * x_n^2 + r^3 * x_n^3 - r^2 * x_n^2 + r^3 * x_n^3 - r^3 * x_n^4$$

$$f^2(x_n) = -r^3 * x_n^4 + 2 * r^3 * x_n^3 - x_n^2 * (r^2 + r^3) + r^2 * x_n$$

$$f^2'(x_n) = -4 * r^3 * x_n^3 + 6 * r^3 * x_n^2 - 2 * x_n * (r^2 + r^3) + r^2$$

Zu 3.5.2: Mehrfach iterierte logistische Funktion

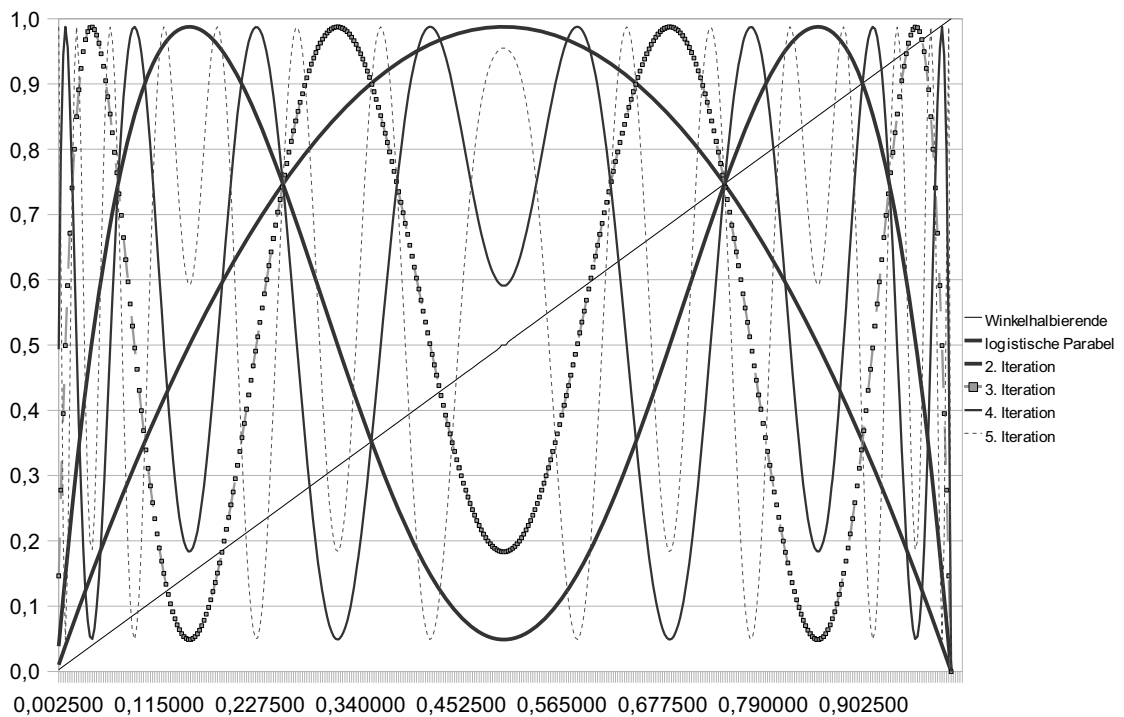


Abb. 45: logistische Funktionen für  $r=3,95$

*Zu 3.7: Zusammenhang zwischen dem logistischen Modell und der Mandelbrotmenge.*

In  $x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n)$  soll x durch  $\frac{-z}{r} + \frac{1}{2}$  substituiert werden.

$$\frac{-z_{n+1}}{r} + \frac{1}{2} = r * \left(\frac{-z_n}{r} + \frac{1}{2}\right) * \left(1 - \left(\frac{-z_n}{r} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\frac{-z_{n+1}}{r} + \frac{1}{2} = \left(-z_n + \frac{r}{2}\right) * \left(\frac{z_n}{r} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{-z_{n+1}}{r} + \frac{1}{2} = \frac{-z_n^2}{r} - \frac{z_n}{2} + \frac{z_n}{2} + \frac{r}{4}$$

$$\frac{-z_{n+1}}{r} = \frac{-z_n^2}{r} + \frac{r}{4} - \frac{1}{2}$$

$$z_{n+1} = z_n^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{r}{2}$$

*Zu 4.2: Prognosen des Sättigungswertes der Weltbevölkerung mit verschiedenen Datengrundlagen*

Es fällt auf, dass diejenigen Berechnungen, die mit Daten im Abstand von fünf bis zehn Jahren durchgeführt wurden, meist einen Sättigungswert um 10 Milliarden liefern. Rechnungen mit Daten mit höheren oder niedrigeren Abständen liefern oft keine oder unrealistische Sättigungswerte.

Zu Grunde liegende Bevölkerungsgröße (siehe Tabelle V) in den Jahren	r (berechnet mit XVII)	$Z_{max}$ (berechnet mit XVI)	Sättigungswert in Milliarden
1250 1500 1750 2000	-5,38	324550000	-
1800 1900 2000	-1,25	418340000	-
1900 1950 2000	-0,16	157360000	-
1900 1930 1960 1990	0,68	-1962680000	-
1900 1910 1920 1930	0,65	-2608880000	-
1950 1960 1970 1980	1,17	-142781158042,83	-
1960 1970 1980 1990	1,29	54389736168,25	12,31
1970 1980 1990 2000	1,31	44172235002,54	10,44
1971 1981 1991 2001	1,30	45061380241,09	10,53
1972 1982 1992 2002	1,31	44613361117,58	10,43
1970 1975 1980 1985	1,16	72675022157,33	10,07
1970 1972 1974 1976	1,11	59240912030,44	5,92
1980 1982 1984 1986	1,04	749646477638,81	29,69
1980 1981 1982 1983	1	-259480902049,41	-

1980 1985 1990 1995	1,15	81299141635,95	10,78
1983 1988 1993 1998	1,18	60484270325,11	9,26
1970 1980 1990	1,32	42123460379,98	10,27
1990 1995 2000 2005	1,18	63673774040,51	9,51
1990 1995 2003 2008	1,16	73164620968,27	10,19
1990 1992 1994 1996	1,07	133419599788,53	9,22
1970 1978 1990 1998	1,24	54579442108,20	10,70
1950 1955 1980 1985	1,09	-1177369237239	-
1950 1960 1980 1990	1,19	708842362261,30	115,34
1950 1960 1998 2008	1,24	69976688008,32	13,32
1960 1969 1973 1982	1,28	<b>43790448817,67</b>	9,71
1990 1993 1997 2000	1,11	89320766087,69	9,07
1996 2000 2004 2008	1,11	119639357719,31	11,66
2005 2006 2007 2008	1,02	1386385966562,3	22,82
1992 1998 2002 2008	1,19	64721822378,47	10,30
1991 1996 2001 2006	1,17	67022998271,33	9,74
1971 1983 1989 2001	1,37	38362895536,66	10,43
1971 1986 2001	1,48	32239740496,86	10,40

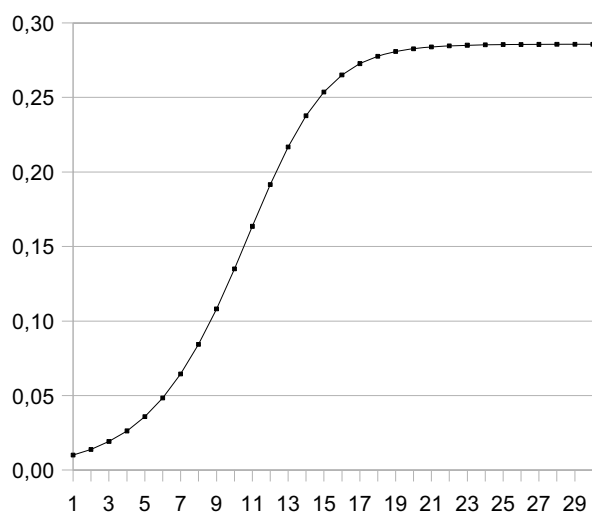
**Tabelle I**

30 Iterationen für  $r=1,4$  und  $x_0=0,01$  mit dem normierten logistischen Modell

$$x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n) \text{ (II):}$$

0	0,010000	10	0,163534	20	0,283914
1	0,013860	11	0,191507	21	0,284629
2	0,019135	12	0,216765	22	0,285062
3	0,026276	13	0,237689	23	0,285322
4	0,035820	14	0,253670	24	0,285479
5	0,048352	15	0,265050	25	0,285573
6	0,064420	16	0,272718	26	0,285629
7	0,084378	17	0,277680	27	0,285663
8	0,108162	18	0,280803	28	0,285684
9	0,135048	19	0,282734	29	0,285696

$$\hat{x} = 0,285714$$



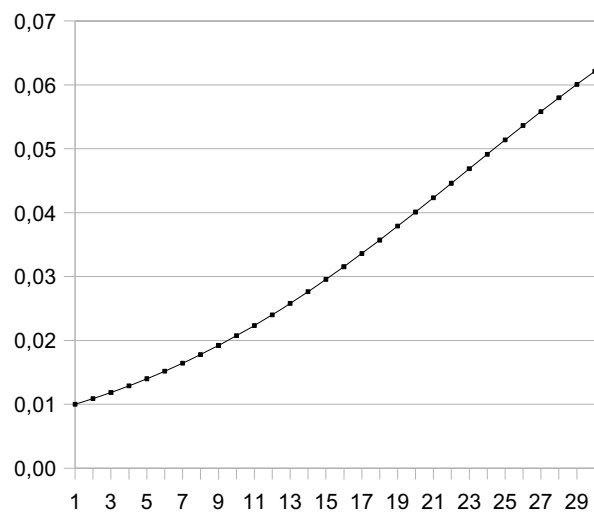
## Tabelle II

30 Iterationen für  $r=1,1$  und  $x_0=0,01$  mit dem normierten logistischen Modell

$$x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n) \text{ (II):}$$

0	0,010000	10	0,022323	20	0,042334
1	0,010890	11	0,024007	21	0,044596
2	0,011849	12	0,025773	22	0,046868
3	0,012879	13	0,027620	23	0,049138
4	0,013984	14	0,029543	24	0,051396
5	0,015168	15	0,031537	25	0,053630
6	0,016431	16	0,033597	26	0,055829
7	0,017778	17	0,035715	27	0,057984
8	0,019208	18	0,037883	28	0,060084
9	0,020723	19	0,040093	29	0,062121

$$\hat{x} = 0,090909$$

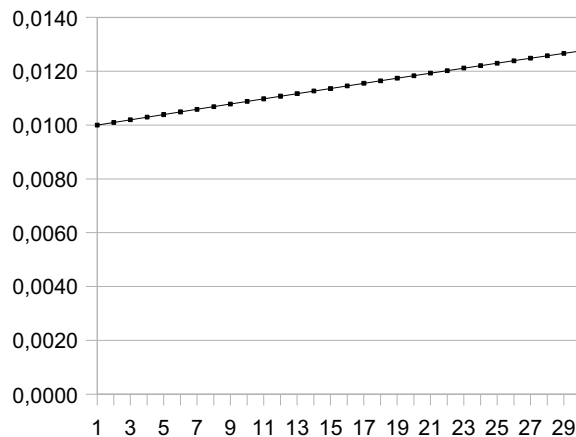


**Tabelle III**

30 Iterationen für  $r=1,02$  und  $x_0=0,01$  mit dem normierten logistischen Modell  
 $x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n)$  (II):

0	0,0100000000	20	0,0119288723	40	0,0137024619
1	0,0100980000	21	0,0120223058	41	0,0137849985
2	0,0101959510	22	0,0121153253	42	0,0138668717
3	0,0102938335	23	0,0122079151	43	0,0139480732
4	0,0103916279	24	0,0123000596	44	0,0140285950
5	0,0104893148	25	0,0123917435	45	0,0141084294
6	0,0105868748	26	0,0124829519	46	0,0141875692
7	0,0106842888	27	0,0125736704	47	0,0142660078
8	0,0107815374	28	0,0126638847	48	0,0143437386
9	0,0108786018	29	0,0127535809	49	0,0144207556
10	0,0109754630	30	0,0128427456	50	0,0144970534
11	0,0110721022	31	0,0129313657	51	0,0145726266
12	0,0111685010	32	0,0130194284	52	0,0146474705
13	0,0112646409	33	0,0131069213	53	0,0147215805
14	0,0113605037	34	0,0131938325	54	0,0147949527
15	0,0114560716	35	0,0132801504	55	0,0148675833
16	0,0115513266	36	0,0133658638	56	0,0149394690
17	0,0116462513	37	0,0134509618	57	0,0150106069
18	0,0117408285	38	0,0135354341	58	0,0150809944
19	0,0118350410	39	0,0136192707	59	0,01515106292
				60	0,0152195093

$\dot{x} = 0,0196078431$





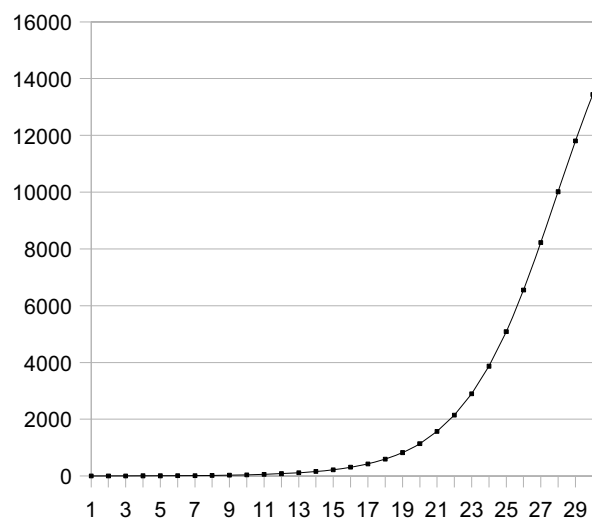
**Tabelle IV**

30 Iterationen für  $r=1,4$ ,  $Z_{\max}=63314$  und  $Z_0=2$  mit dem logistischen Modell

$$Z_{n+1} = r * Z_n * \left(1 - \frac{Z_n}{Z_{\max}}\right) :$$

0	2,000000	10	57,723582	20	1568,720327
1	2,799912	11	80,739338	21	2141,793370
2	3,919703	12	112,890928	22	2897,076748
3	5,487244	13	157,765496	23	3870,320134
4	7,681476	14	220,321327	24	5087,223986
5	10,752762	15	307,376508	25	6549,858043
6	15,051310	16	428,237961	26	8221,181737
7	21,066825	17	595,478073	27	10015,151465
8	29,483741	18	825,828512	28	11803,305073
9	41,258016	19	1141,079684	29	13444,025420

$$\overset{\circ}{Z} = 18090$$



**Tabelle V: Entwicklung der Weltbevölkerung vom Jahr 0 bis 2008<sup>26</sup>**

<b>Jahr</b>	<b>Weltbevölkerung</b>	<b>Jahr</b>	<b>Weltbevölkerung</b>
0	300000000	1974	4016492494
1000	310000000	1975	4089099884
1250	400000000	1976	4160214387
1500	500000000	1977	4231871296
1750	790000000	1978	4303360618
1800	980000000	1979	4377574599
1850	1260000000	1980	4452557135
1900	1650000000	1981	4528851856
1910	1750000000	1982	4608724252
1920	1860000000	1983	4690468570
1930	2070000000	1984	4770692564
1940	2300000000	1985	4852222547
1950	2555955393	1986	4935909709
1951	2593762723	1987	5022295833
1952	2635863798	1988	5109332771
1953	2681218284	1989	5196345317
1954	2729315209	1990	5284486614
1955	2780910167	1991	5368119847
1956	2834066711	1992	5451777624
1957	2890100770	1993	5533921969
1958	2946827264	1994	5614822264
1959	2999378714	1995	5696482556
1960	3041685851	1996	5777637313
1961	3082691999	1997	5857760684
1962	3138916065	1998	5936978622
1963	3208674402	1999	6015068028
1964	3280051447	2000	6092409072
1965	3349292709	2001	6169838287
1966	3419738139	2002	6246193906
1967	3489694405	2003	6322212532
1968	3561750111	2004	6399126122
1969	3636594449	2005	6476521420
1970	3711996957	2006	6554167609
1971	3789664718	2007	6632170923
1972	3866022631	2008	6710926117
1973	3941865014		

<sup>26</sup> Daten aus:

Vereinte Nationen: „The world at six billion“. Internetseite:

<http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbilpart1.pdf> ohne Datum, aufgerufen am 22.1.2008.

U. S. Census Bureau: International Data Base. Internetseite:

<http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpop.html> vom 15.12.2008, aufgerufen am 22.1.2008.

**Tabelle VI:**

zu 4.2: Berechnung der Entwicklung der Weltbevölkerung mit dem logistischen Modell und den Parametern  $r=1,15251275907694$  und  $Z_{max}=80.045.183.956$  . Werte gerundet.

<b>Iteration</b>	<b>Entspricht Jahr</b>	<b>Bevölkerung</b>	<b>Iteration</b>	<b>Entspricht Jahr</b>	<b>Bevölkerung</b>
0	1205	2	100	1705	2920790
1	1210	2	101	1710	3366124
2	1215	3	102	1715	3879338
3	1220	3	103	1720	4470770
4	1225	4	104	1725	5152332
5	1230	4	105	1730	5937746
6	1235	5	106	1735	6842820
7	1240	5	107	1740	7885764
8	1245	6	108	1745	9087548
9	1250	7	109	1750	10472326
10	1255	8	110	1755	12067910
11	1260	10	111	1760	13906323
12	1265	11	112	1765	16024431
13	1270	13	113	1770	18464664
14	1275	15	114	1775	21275851
15	1280	17	115	1780	24514173
16	1285	19	116	1785	28244244
17	1290	22	117	1790	32540366
18	1295	26	118	1795	37487941
19	1300	30	119	1800	43185095
20	1305	34	120	1805	49744521
21	1310	39	121	1810	57295567
22	1315	45	122	1815	65986605
23	1320	52	123	1820	75987711
24	1325	60	124	1825	87493669
25	1330	70	125	1830	100727349
26	1335	80	126	1835	115943470
27	1340	92	127	1840	133432774
28	1345	106	128	1845	153526623
29	1350	123	129	1850	176602018
30	1355	141	130	1855	203087022
31	1360	163	131	1860	233466536
32	1365	188	132	1865	268288361
33	1370	216	133	1870	308169390
34	1375	249	134	1875	353801773
35	1380	287	135	1880	405958743
36	1385	331	136	1885	465499759
37	1390	382	137	1890	533374449
38	1395	440	138	1895	610624716
39	1400	507	139	1900	698384198
40	1405	585	140	1905	797874076
41	1410	674	141	1910	910394066
42	1415	777	142	1915	1037307235
43	1420	895	143	1920	1180017186
44	1425	1031	144	1925	1339936117
45	1430	1189	145	1930	1518442390
46	1435	1370	146	1935	1716826591
47	1440	1579	147	1940	1936225722

48	1445	1820	148	1945	2177546138
49	1450	2097	149	1950	2441377293
50	1455	2417	150	1955	2727900095
51	1460	2786	151	1960	3036795763
52	1465	3211	152	1965	3367163100
53	1470	3700	153	1970	3717453828
54	1475	4265	154	1975	4085436507
55	1480	4915	155	1980	4468199056
56	1485	5665	156	1985	4862197654
57	1490	6529	157	1990	5263355648
58	1495	7525	158	1995	5667210320
59	1500	8672	159	2000	6069098800
60	1505	9995	160	2005	6464368228
61	1510	11519	161	2010	6848590834
62	1515	13276	162	2015	7217763087
63	1520	15301	163	2020	7568469896
64	1525	17634	164	2025	7897999792
65	1530	20324	165	2030	8204404017
66	1535	23423	166	2035	8486499934
67	1540	26996	167	2040	8743825712
68	1545	31113	168	2045	8976557772
69	1550	35858	169	2050	9185404486
70	1555	41327	170	2055	9371489370
71	1560	47629	171	2060	9536235054
72	1565	54894	172	2065	9681256413
73	1570	63265	173	2070	9808268148
74	1575	72914	174	2075	9919009321
75	1580	84035	175	2080	10015185145
76	1585	96851	176	2085	10098424811
77	1590	111622	177	2090	10170253269
78	1595	128645	178	2095	10232074494
79	1600	148265	179	2100	10285163742
80	1605	170877	180	2105	10330666530
81	1610	196937	181	2110	10369602369
82	1615	226972	182	2115	10402871664
83	1620	261588	183	2120	10431264509
84	1625	301482	184	2125	10455470463
85	1630	347461	185	2130	10476088604
86	1635	400451	186	2135	10493637412
87	1640	461523	187	2140	10508564162
88	1645	531908	188	2145	10521253650
89	1650	613026	189	2150	10532036156
90	1655	706515	190	2155	10541194620
91	1660	814261	191	2160	10548971021
92	1665	938436	192	2165	10555572024
93	1670	1081547	193	2170	10561173924
94	1675	1246480	194	2175	10565926957
95	1680	1436562	195	2180	10569959045
96	1685	1655626	196	2185	10573379031
97	1690	1908091	197	2190	10576279470
98	1695	2199047	198	2195	10578739026
99	1700	2534360	199	2200	10580824524

## 7. Abbildungsverzeichnis

Abb. 8 - Abb. 12: Internetseite: <http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/logit1.htm> ohne Datum, aufgerufen am 21.1.2008.

Abb. 39: Internetseite: [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/LogisticMap\\_BifurcationDiagram.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7d/LogisticMap_BifurcationDiagram.png) vom 14.9.2005, aufgerufen am 19.1.2008.

Abb. 40: Internetseite: [http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelset\\_hires.png](http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mandelset_hires.png) vom 19.12.2006, aufgerufen am 19.1.2008.

Alle weiteren Abbildungen wurden mit OpenOffice.org 3.0.0 Calc erstellt.

## 8. Literaturverzeichnis

### *Verwendete Literatur*

- [1] Bräuer, K: Chaos, Attraktoren und Fraktale. Berlin, 2002.
- [2] Stoop, R., Steeb, W.-H.: Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen. Basel, 2006.

### *Internetquellen*

<http://hajolange.de/07%20-%20Klima%20im%20Phasenraum.pdf> 2007, aufgerufen am 28.1.2008.

<http://www.bjerregaard-simonsen.dk/sbs/Formelsamlinger/kaos.pdf> ohne Datum, aufgerufen am 14.1.2008.

<http://www.bpb.de/wissen/I6T8RL,0,0,Bev%F6lkerungswachstum.html> ohne Datum, aufgerufen am 24.1.2008.

<http://www.census.gov/ipc/www/worldhis.html> vom 12.12.2008, aufgerufen am 22.1.2008.

<http://www.census.gov/ipc/www/idb/worldpop.html> vom 12.12.2008, aufgerufen am 22.1.2008.

[http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische\\_arbeitsblaetter/lwolf/mandel/mandel.html](http://www.geogebra.org/de/upload/files/dynamische_arbeitsblaetter/lwolf/mandel/mandel.html) ohne Datum, aufgerufen am 25.1.2008.

<http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/> ohne Datum, aufgerufen am 15.1.2008.

<http://www.un.org/esa/population/publications/sixbillion/sixbilpart1.pdf> ohne Datum, aufgerufen am 22.1.2008.

[http://www.un.org/esa/population/publications/wpp2006/WPP2006\\_Highlights\\_rev.pdf](http://www.un.org/esa/population/publications/wpp2006/WPP2006_Highlights_rev.pdf) ohne Datum, aufgerufen am 22.1.2008.

Ich erkläre, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Marktschellenberg, den 30.01.2008

---

(Moritz Bitterling)